CONSTRUCCIONES EN TRIANGULOS

DEFACIL

Técnicas y criterios para realizar trazos auxiliares

Ing. José Luis Meza Barcena

Revisado por Prof. Erich A. Villavicencio Gutierrez

Danielahdv@gmail.com

CONSTRUCCIONES EN TRIÁNGULOS

Técnicas y criterios para realizar trazos auxiliares

Ing. José Luis Meza Barcena

Presentación

Permítanme presentarme como profesional egresado de la Universidad Nacional de Ingeniería, presentando al respetable lector este sencillo aporte al conocimiento práctico de la Geometría que es el Fruto de una fructífera experiencia cotidiana en la enseñanza, de consultar e investigar sobre las ideas y la forma de la resolución de los problemas empleando trazos auxiliares; contenido que han sido discutidos por varios docentes que han participado en mi formación, han sido reevaloradas, actualizadas y emsambladas para realizar esta magnifica obra.

Me he propuesto con él tres objetivos: claridad en la exposición, rigor en la explicación de los métodos y la utilidad de la imaginación y abstracción.

Precisamente, la colección de problemas resueltos detalla claramente que constituyen esta obra ha sido concebida con el objeto de llevar al estudiante a una asimilación más rápida y segura de tales métodos de lo que suele ser no posible con los textos corrientes, no se trata por cierto de una colección de problémas de adiestramiento mecánico, sino de exponer resoluciones bien detalladas que tienen precisamente por objetivo acostumbrar al que aprende a trabajar correctamente, dando todos los pasos indispensables y fundamentando todos sus operaciones y reglas graduando cuidadosamente la dificultad de los ejercicios.

Así paso por paso, el estudiante es conducido por mano firme hasta el momento que pueda resolver los problemas solo. Es el momento en que puede decirse plenamente que la técnica en particular que se estudiaba ha sido asimilada a la perfección.

Tras un atento estudio de las reglas que abre cada método, recuérdese que, como proceso de asimilación más indicado, se ha de tratar de resolver por propia cuenta lo más posible de los problemas y comparar después los resultados obtenidos con los que aparecen en la obra, y en ocasiones será muy provechoso revisar previamente los "trucos" lógicos (métodos de construcciones), por así llamarlos, que permiten muchas veces emprender la resolución de los problemas de aquellas que constituyen "El dolor de cabeza" de todo principiante. En suma, la colección de problemas que aquí se representa obedece a la clara convicción de que todo curso de matemática tiene por columna vertebral el estudio y solución de ejercicios y problemas; Recomiendo que tengamos paciencia, consultemos y revisemos nuestras dudas, pensando que el buen conocimiento está directamente relacionado con la práctica y que ésto nos permitira ingresar en el grandioso mundo de la matemática.

EL AUTOR.

Agradecimiento

El autor desea manifestar su agradecimiento, en primer lugar a todos los profesores y alumnos pre universitarios que me han escuchado y enriquecido con su amistad, experiencias, preguntas, críticas y comentarios.

A la Editorial "IMPECUS" por su auspicio en la publicación de esta obra.

De modo particular a Erich A. Villavicencio G., Rossel Higinio Regalado, Hernán Rado, Ivan Tovar Fuentes, Alex Achulla, Arturo Jacinto Cahuana, Matilde Gamboa, a mis grandes amigos del "Centro Cultural Avanzada Tecnológica (CCAT)", cuna de excelentes profesionales de la Universidad Nacional de Ingenieria de la facultad de ingenieria Industrial y de sistemas quienes han hecho valerosos comentarios para mejorar tanto el contenido como la forma de la presente obra.

Y un agradecimiento especial a mis padres Teofilo y Francisca quienes me iluminan mi camino con sus sabios consejos y a mis inquietos y extrañables hermanos Miguel, Roger, Juana, Zenón, Daniel Gabriel, Alcides, Miller que me motivan a ser cada vez mejor.

Y una dedicatoria muy especial de esta obra a mi querida tía María Apari Suarez y Familia.

Y a todo aquel que tenga a bien dirigirnos sus críticas, comentarios o sugerencias serán muy bien recibidas.

El autor.

La geometría esta en todas partes

Fijese en las formas regulares y perfectas que presentan muchos cuerpos. Las flores, las hojas e incontables animales revelan simetrías admirables que dislumbran nuestro espíritu.

La Geometría, repito, existe en todas partes: en el disco solar, en las hojas, en el arco iris, en los suaves pétalos de una flor, en la mariposa, en el diamante, en la estrella de mar y hasta en un diminuto grano de arena, hay, en fin, una infinita variedad de formas geométricas extendidas por la naturaleza. Un cuervo que vuela lentamente por el cielo describe con la mancha negra de su cuerpo figuras admirables. La sangre que circula por las venas del camello no escapa tampoco a los rigurosos principios geométricos, ya que sus glóbulos presentan la singularidad única entre los mamíferos de tener forma elíptica; la piedra que se tira al perro inoportuno dibuja en el aire una curva perfecta, denominada parábola; la abeja construye sus panales con la forma de prismas hexagonales y adopta esta forma geométrica, creo yo, para obtener su casa con la mayor economía posible de material.

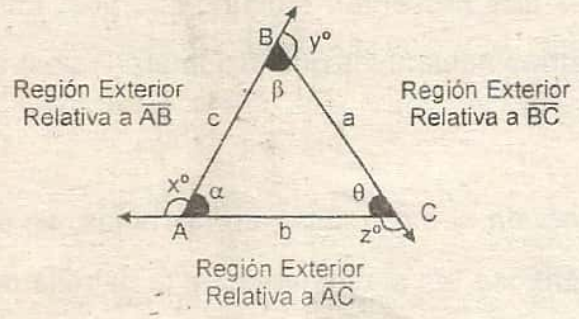
La Geometría existe, como dijo el filósofo, en todas partes. Es preciso, sin embargo, tener ojos para verla, inteligencia para comprenderla y alma para admirarla.

El campesino ve las formas geométricas pero no las entiende; el citadino común las entiende, pero no las admira; el artista, en fin, ve a la perfección de las figuras, comprende la belleza, y admira el orden y la armonía. Dios fue el Gran Geómetra. que Geometrizó el cielo y la tierra.

El autor.

Triángulos

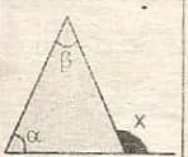
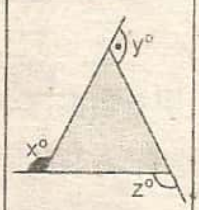
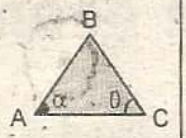
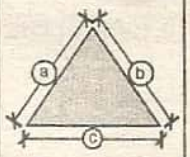
Es aquella figura geométrica determinada por la unión de tres puntos no colineales mediante segmentos de linea recta.



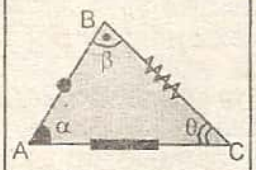
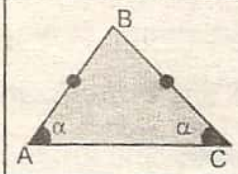
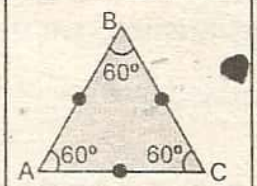
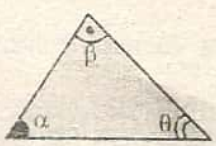
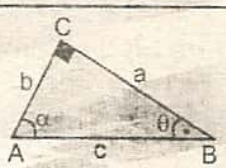
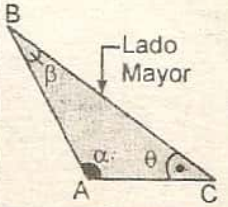
ELEMENTOS	NOTACIÓN
• Vértices ..... A, B, C • Lados ..... AB, BC, AC - ∡s Internos ..... α, β y θ - ∡s Externos ..... x , y , z	ΔABC: ..... Se lee: triángulo de vértices A, B y C

PERÍMETRO (2P)	SEMIPERÍMETRO (P)
Es la longitud del contorno de la región triangular ABC 2P = a + b + c	$P = \frac{a+b+c}{2}$

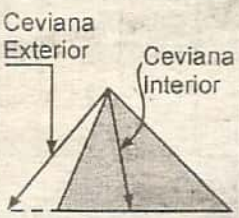
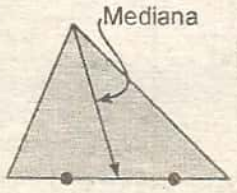
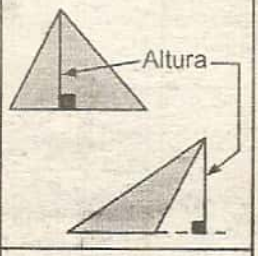
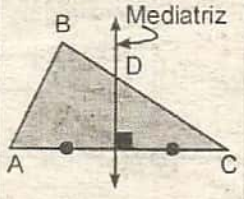
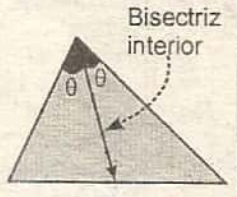
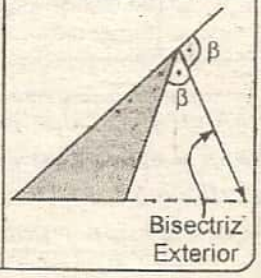
PROPIEDAD FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

N°	PROPIEDAD	GRÁFICO	SE CUMPLE
1	Suma de las medidas de sus ángulos internos		α+β+θ= 180°
2	Medida de un ángulo exterior		x = α + β
3	Suma de las medidas de sus ángulos externos		x°+y°+z° = 360°
4	Correspondencia		Si: $\overline{AB} > \overline{BC}$ ⇒ θ > α
5	Existencia del Triángulo ó de Desigualdad Triangular		Si a > b > c b-c < a < b+c a-c < b < a+c a-b < c < b+a

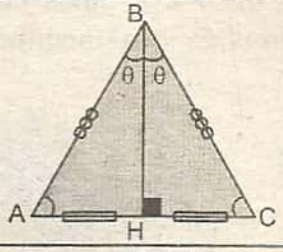
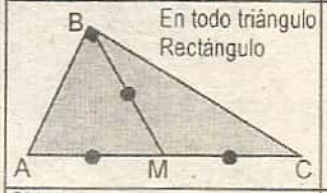
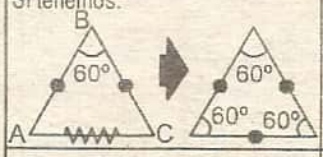
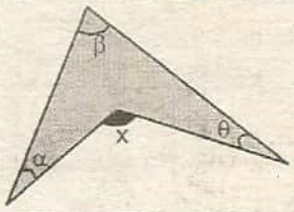
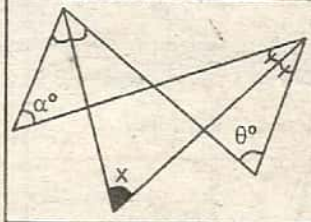
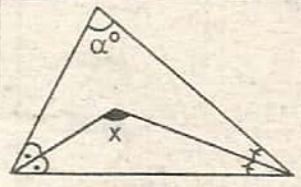
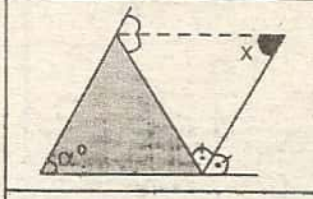
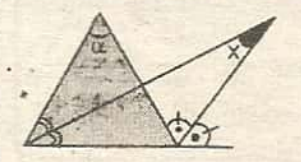
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

	TRIÁNGULO	FIGURA	CARACTERÍSTICA
LADOS	ESCALENO		AB≠BC≠AC ⇒ α ≠ β ≠ θ
LADOS	ISÓSCELES		AB = BC ⇒ m∡A = m∡C AC → Base
LADOS	EQUILÁTERO		AB=BC=AC ⇒ Â=B̂=Ĉ=60°
ÁNGULOS	ACUTÁNGULO		α < 90° β < 90° θ < 90° (Tiene ∡s agudos)
ÁNGULOS	RECTÁNGULO		* AC y BC Catetos * AB → Hipotenusa * α + θ = 90° * $c^2 = a^2 + b^2$
ÁNGULOS	OSTUSÁNGULO		α > 90° β<90° ∧ θ<90°

LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

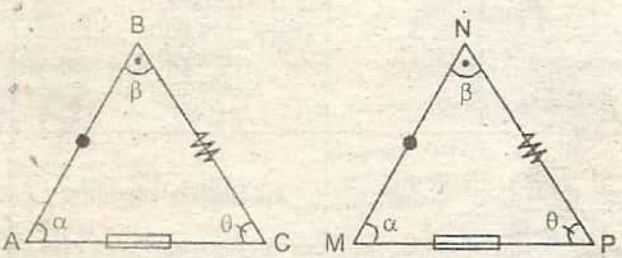
	CARACTERÍSTICA	GRÁFICO
CEVIANA	Es aquel segmento que tiene por extremos un vértice del triángulo y un punto cualquiera del lado opuesto o de su respectiva prolongación.	
MEDIANA	Es aquel segmento que tiene por extremos un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.	
ALTURA	Es aquel segmento perpendicular trazado de un vértice del triángulo hacia al lado opuesto o hacia su respectiva prolongación	
MEDIATRIZ	Es la recta perpendicular a un lado cualquiera del triángulo en su punto medio.	 AD=DC; ∢DAC= ∢DCA
BISECTRIZ INTERIOR	Es la ceviana interior trazado desde un vértice del triángulo que biseca o divide en partes iguales al ángulo interior.	
BISECTRIZ EXTERIOR	Es la ceviana exterior trazado desde un vértice del triángulo que divide en partes iguales al ángulo exterior.	

PROPIEDADES

GRÁFICO	SE CUMPLE
	En todo triángulo isósceles $\overline{BH}$ { Altura, Mediana, Bisectriz, Mediatriz }
	Si: $\overline{BM}$ → Mediana ⇒ AM = MC = BM
Si tenemos: 	Si: AB = BC y $m\hat{ABC} = 60°$ ⇒ ΔABC es Equilátero
	En todo cuadrilátero cóncavo: $x = \alpha + \beta + \theta$
	$x = \frac{\alpha^\circ + \theta^\circ}{2}$
	$x = 90^\circ + \frac{\alpha^\circ}{2}$
	$x = 90^\circ - \frac{\alpha^\circ}{2}$
	$x = \frac{\alpha^\circ}{2}$

Congruencia de Triángulos

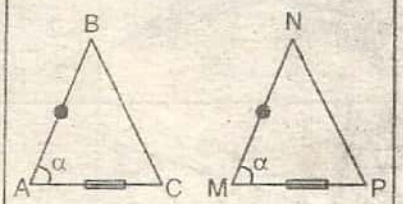
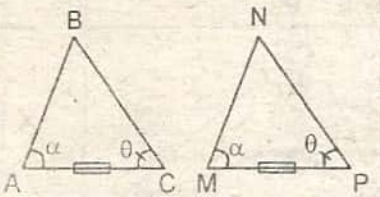
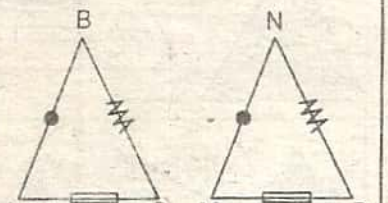
Dos triángulos son congruentes si ellos tienen igual forma y tamaño, es decir a ángulos de igual medida se oponen lados de igual longitud y viceversa.



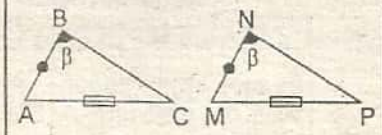
$\Delta ABC \cong \Delta MNP$

Se lee "es congruente con"

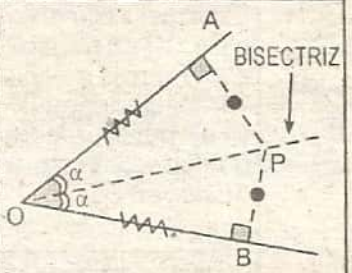
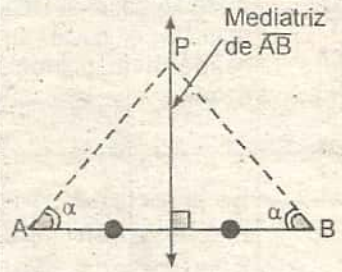
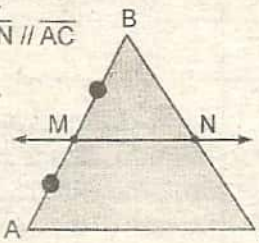
CASOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

CASO	CONDICIÓN	GRÁFICO
I	Lado Ángulo Lado (L.A.L.)	 $\Delta ABC \cong \Delta MNP$
II	Ángulo Lado Ángulo (A.L.A.)	 $\Delta ABC \cong \Delta MNP$
III	Lado Lado Lado (L.L.L.)	 $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

CASO ESPECIAL DE CONGRUENCIA

CASO	CONDICIÓN	GRÁFICO
IV	Ángulo Lado Lado mayor	 $AC > BC \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MNP$

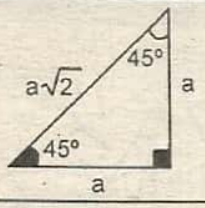
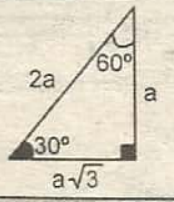
APLICACIONES DE CONGRUENCIA

TEOREMA	CARACTERÍSTICA	SE CUMPLE
BISECTRIZ	Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo	 $\Rightarrow \boxed{AP = PB \wedge AO = OB}$
MEDIATRIZ	Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento	 $\Rightarrow \boxed{\overline{AP} = \overline{PB}}$
BASE MEDIA	En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y además su longitud es la mitad de dicho tercer lado.	Si: $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$  $\Rightarrow \boxed{\overline{BN} = \overline{NC} \wedge \overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}}$

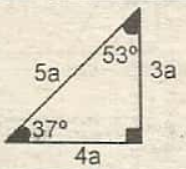
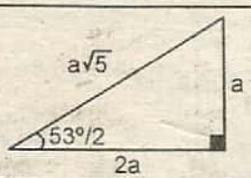
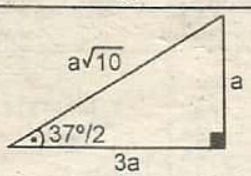
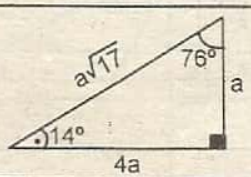
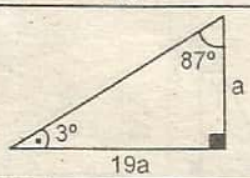
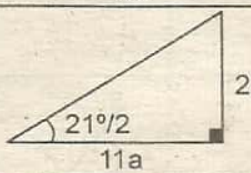
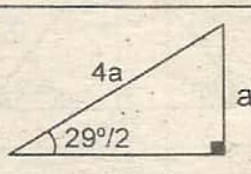
La ciencia exige del hombre toda su vida y aún si ustedes tuvieran dos vidas no les serían suficientes, la ciencia exige del hombre una gran tensión y una pasión inmensa»

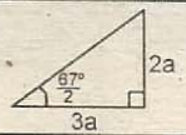
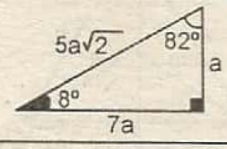
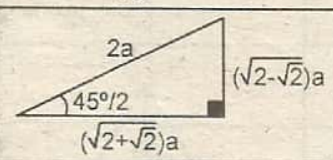
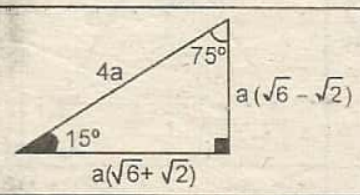
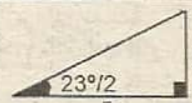
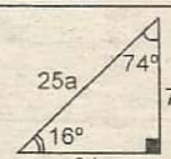
Anónimo

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

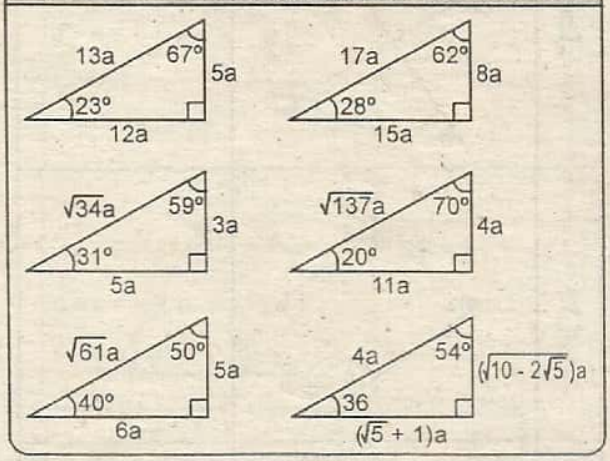
MEDIDA	RELACIÓN DE LADOS
45° y 45°	
30° y 60°	

TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLES APROXIMADOS

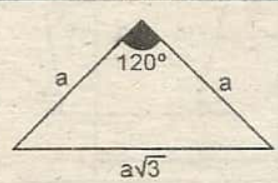
37° y 53°	
53°/2 (26° 30')	
37°/2 (18° 30')	
14° y 76°	
3° y 87°	
21°/2	
29°/2	

MEDIDA	RELACIÓN DE LADOS
67°/2	
8° y 82°	
45°/2	
15° y 75°	
23°/2	
16° y 74°	

ADICIONALES



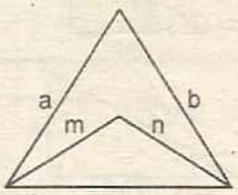
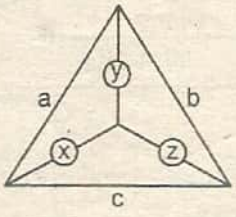
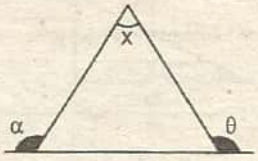
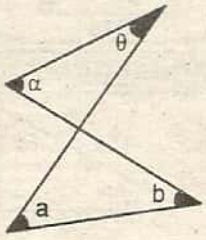
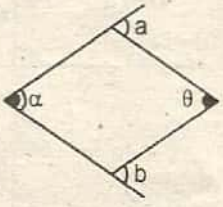
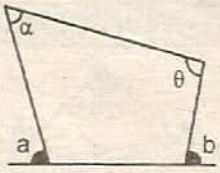
ADICIONAL

MEDIDA	RELACIÓN DE LADOS
120°	

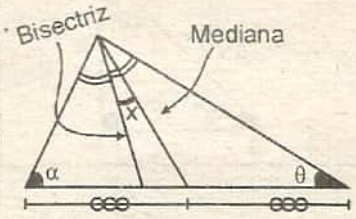
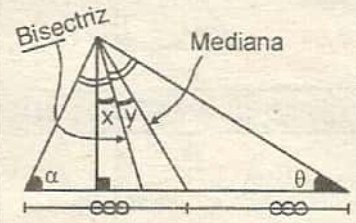
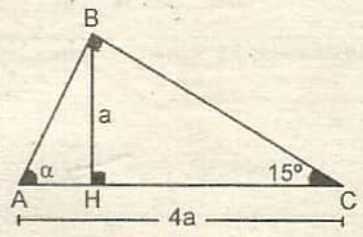
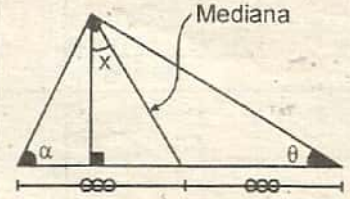
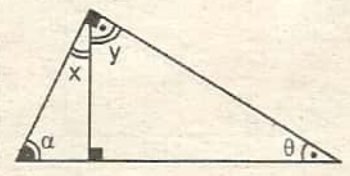
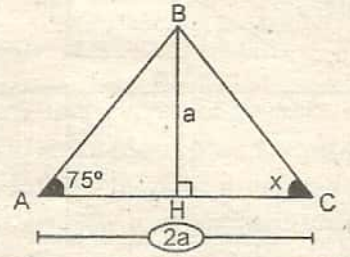
He aquí la matemática, la creación más original del ingenio humano (Whitehead)

PROPIEDADES ADICIONALES

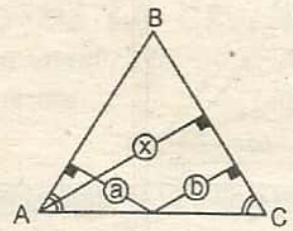
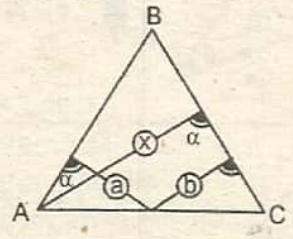
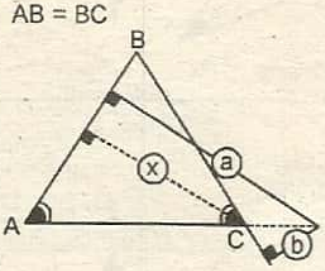
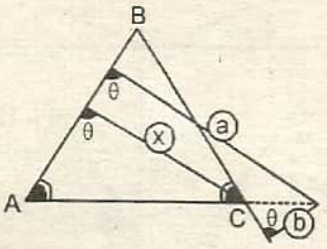
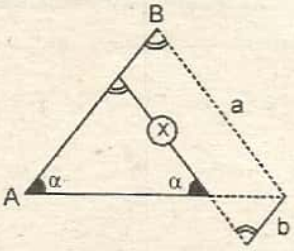
PARA TODO TRIÁNGULO

	FIGURA	SE CUMPLE
1		$m + n < a + b$
2		Si: $p = \frac{a+b+c}{2}$ $p < x + y + z < 2p$
3		$\alpha + \theta = 180° + x$
4		$\alpha + \theta = a + b$
5		$\alpha + \theta = a + b$
6		$\alpha + \theta = a + b$

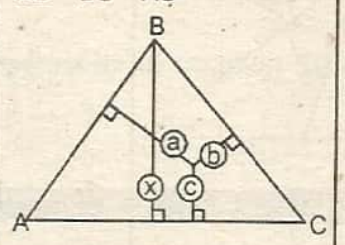
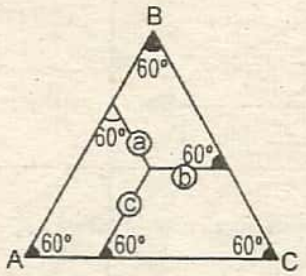
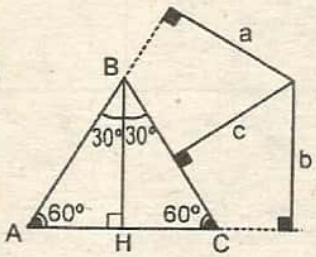
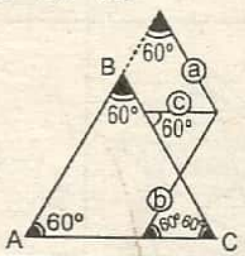
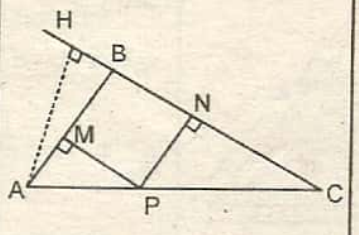
PARA TRIÁNGULO RECTÁNGULOS

	FIGURA	SE CUMPLE
1		$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$
2		$x = y$
3		$\overline{BH} = \frac{\overline{AC}}{4}$
4		$x = \alpha - \theta$
5		$\alpha = y$ $\theta = x$
6		$x = 30°$

PARA TRIÁNGULOS ISÓSCELES

	FIGURA	SE CUMPLE
1	Si: AB = BC 	x = a + b
2	Si: AB = BC 	x = a + b
3	Si: AB = BC 	x = a – b
4		x = a – b
5		x = a – b

PARA TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS

	FIGURA	SE CUMPLE
1	Si: AB = BC = AC 	x = a + b + c $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}(a+b+c)$
2		AB = a + b + c
3		BH = a + b – c $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}(a+b-c)$
4	Si: AB = BC = AC 	$\overline{AB} = a + b - c$
6		Si: AB = BC AH = PM + PN

ADICIONALES

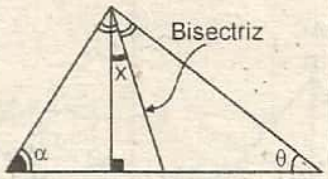
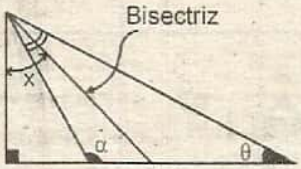
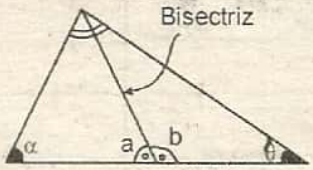
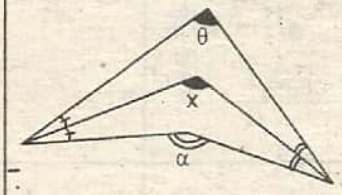
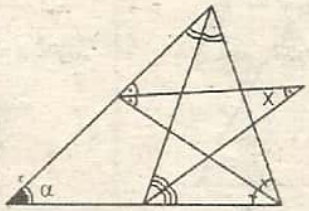
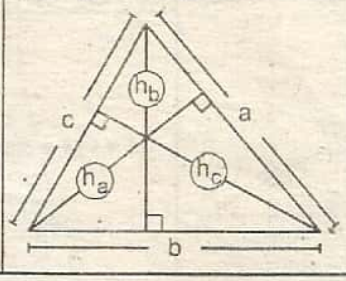
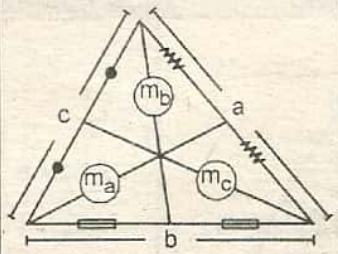
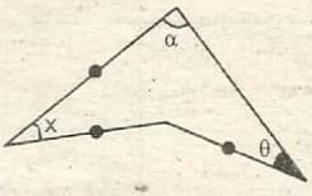
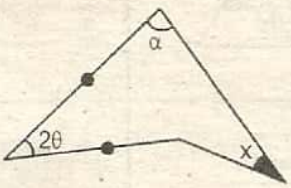
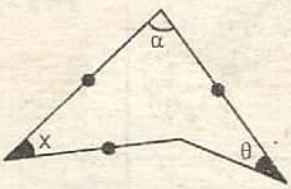
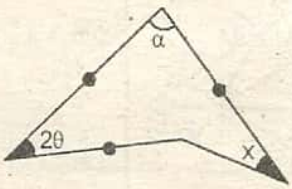
	FIGURA	SE CUMPLE
1		$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$
2		$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$
3		$\alpha + a = \theta + b$
4		$x = \frac{\theta + \alpha}{2}$
5		$x = 45° - \frac{\alpha}{4}$
6		Si: $P = \frac{a+b+c}{2}$ $h_a + h_b + h_c < 2P$

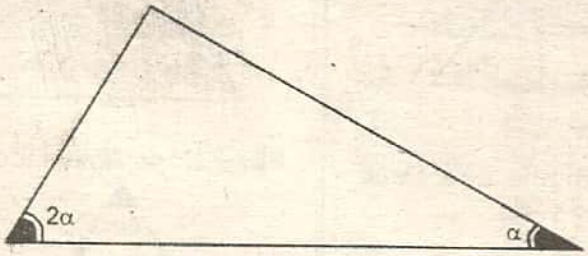
	FIGURA	SE CUMPLE
7		$P = \frac{a+b+c}{2}$ $P < m_a + m_b + m_c < 2P$
	TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO	**SE CUMPLE**
8		Si: $\alpha + \theta = 120°$ $\Rightarrow x = 2\theta$
9		$\alpha + \theta = 120°$ $\Rightarrow x = \theta$
10		$\alpha + 2\theta = 120°$ $\Rightarrow x = 2\theta$
11		$\alpha + 2\theta = 120°$ $\Rightarrow x = \theta$

CRITERIOS PARA HACER TRAZOS AUXILIARES EN TRIÁNGULOS

1er Criterio

"TRAZO DE LA CEVIANA"

Cuando se observa un triángulo que tenga ángulos interiores en el relación de uno a dos, de la siguiente forma.



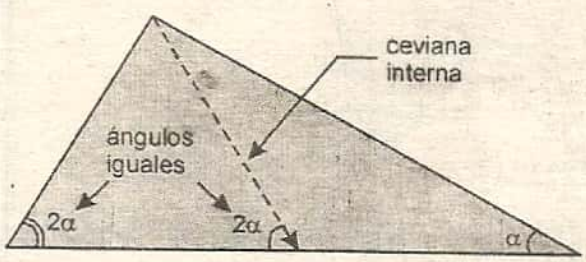
Se trazará una ceviana interna tal que forme un ángulo igual al mayor en la misma base del triángulo.

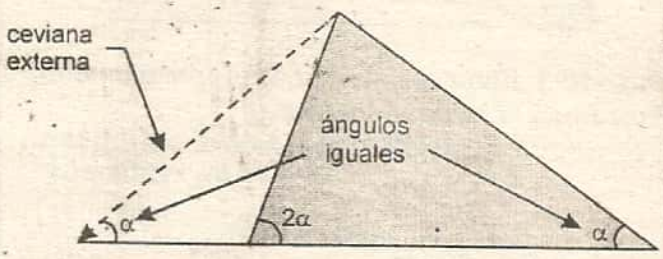
Tendremos dos opciones

1ero

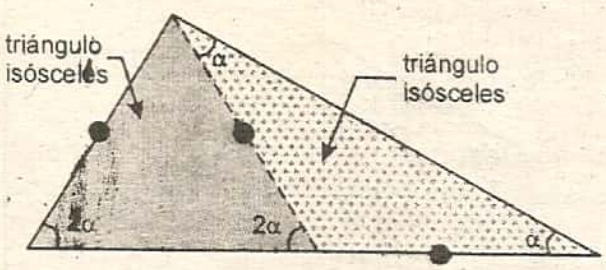
2do

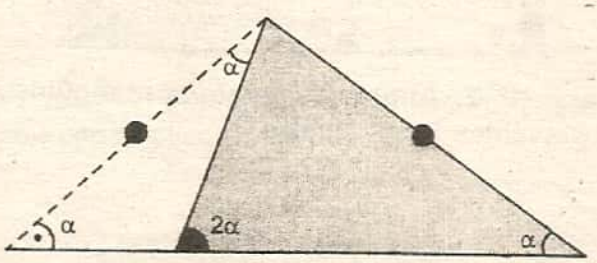
Se trazará una ceviana externa tal que forme un ángulo igual al menor en la misma base del triángulo.



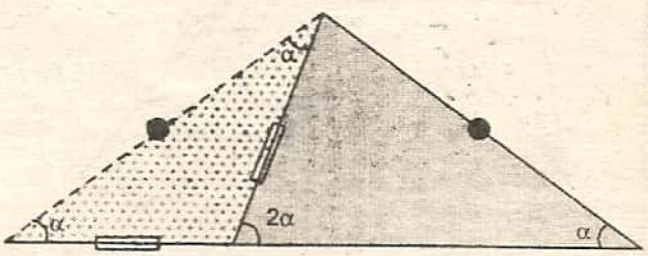


En ambos casos obtenemos triángulos isósceles como se muestra en las figuras.



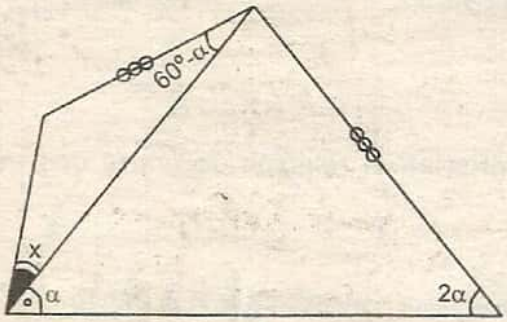


también:



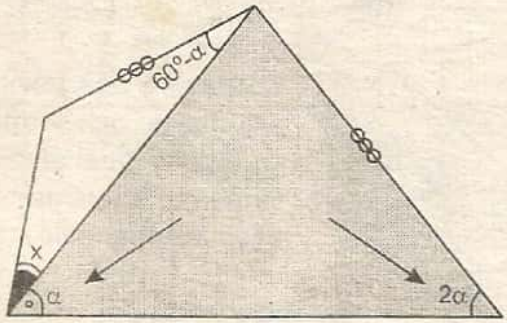
EJEMPLO Nº 1

De la figura calcular "x"

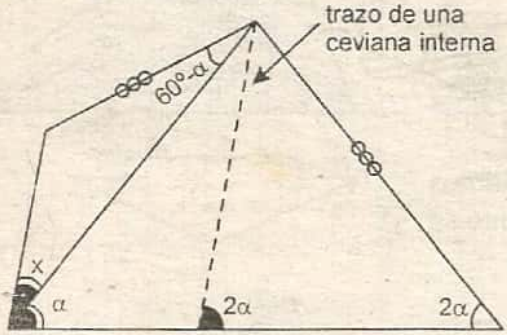


SOLUCIÓN:

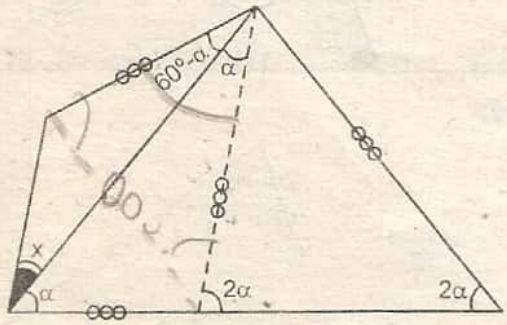
Se tiene en la figura un triángulo que tiene ángulos internos la relación de 1 a 2.



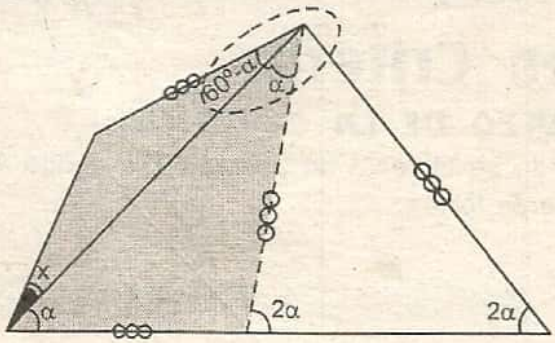
Paso Nº 1: Entonces aplicamos el primer criterio: Trazamos la ceviana interna.



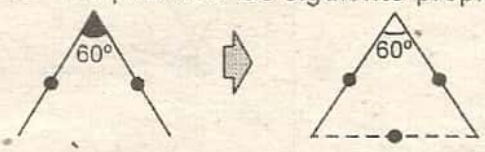
Paso Nº 2: Ahora, completamos ángulos y observamos lados iguales.



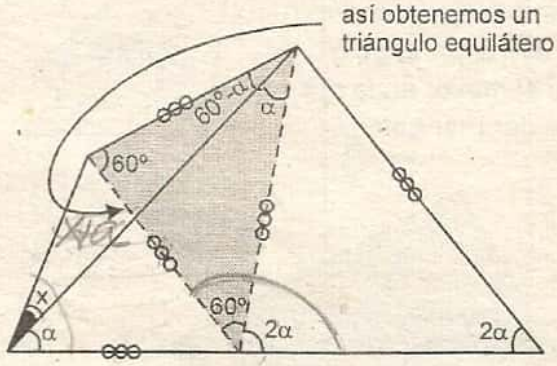
Paso Nº 3: Se observa, un ángulo de 60° de la siguiente forma.



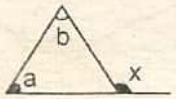
Paso Nº 4: Aplicando las siguiente propiedad.



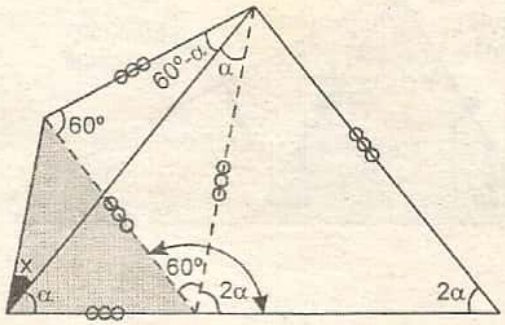
así obtenemos un triángulo equilátero



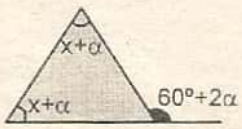
Paso Nº 5: Se observa un triángulo isósceles adicional donde se podrá aplicar.



$x = a + b$



De aquí:



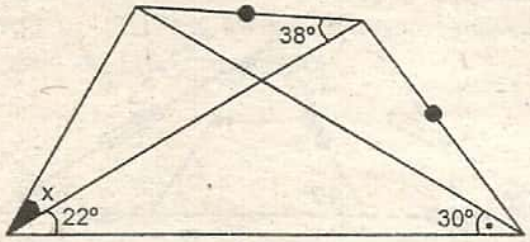
$$x + \alpha + x + \alpha = 60° + 2\alpha$$

$$2x + 2\alpha = 60° + 2\alpha$$

$$\mathbf{x = 30°}$$

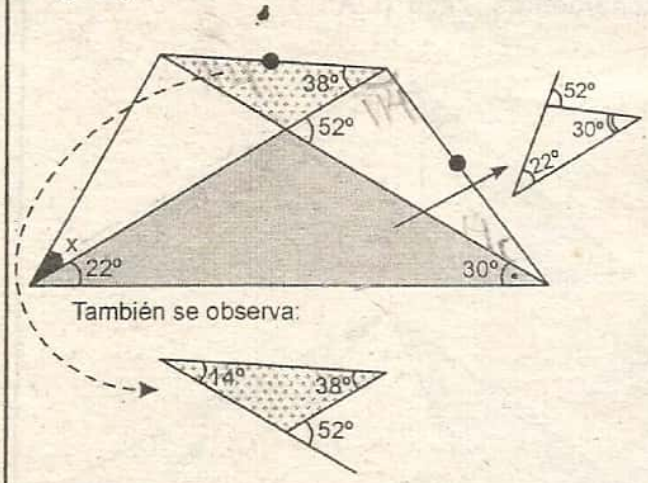
EJEMPLO Nº 2

De la figura calcular "x"

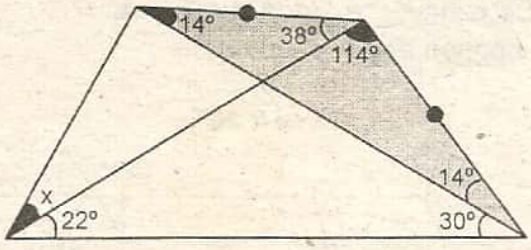


SOLUCIÓN:

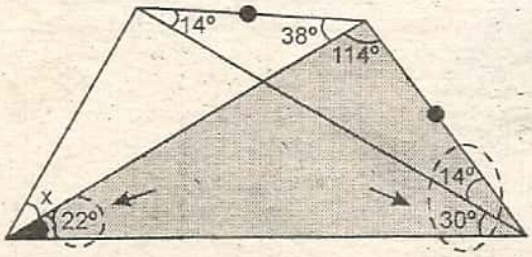
Paso Nº 1: Completamos ángulos, internos en la figua y se tiene:



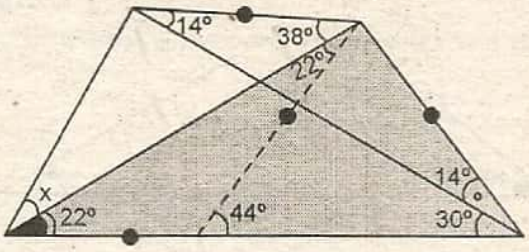
Paso Nº 2: Se tiene un triángulo isósceles.



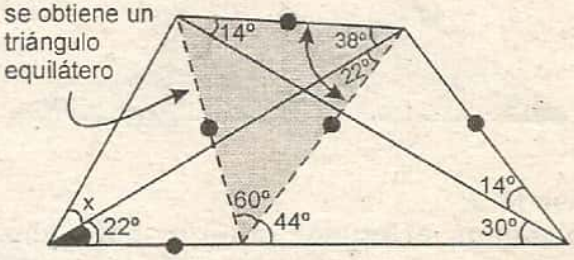
Paso Nº 3: Se observa un triángulo que tiene ángulos internos en la relación de 1 a 2 (22° y 44°)



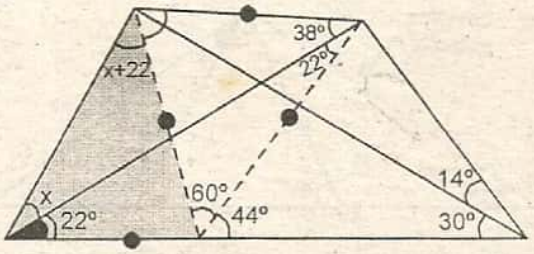
Paso Nº 4: Aplicamos el primer criterio; trazamos la ceviana interna.



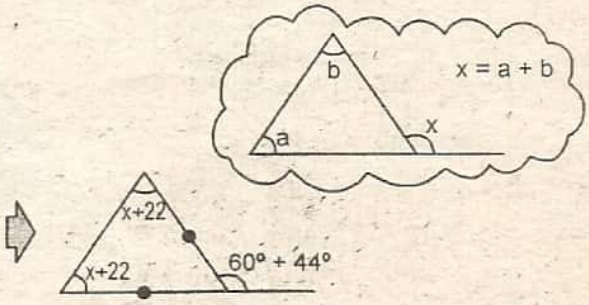
Paso Nº 5: Ahora observamos un ángulo 60° (38°+22°) acompañado de dos lados iguales, entonces hacemos:



Paso Nº 6: Luego se observa un nuevo triángulo isósceles.



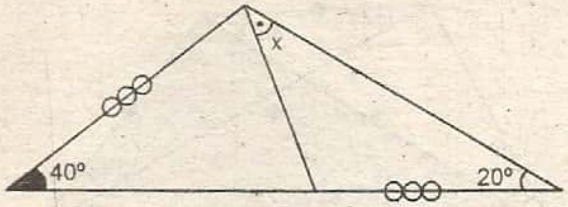
Paso Nº 7: Ahora en este triángulo isósceles se puede aplicar.



$$x + 22° + x + 22° = 60° + 44°$$
$$2x + 44° = 60° + 44°$$
$$x = 30°$$

EJEMPLO Nº 3

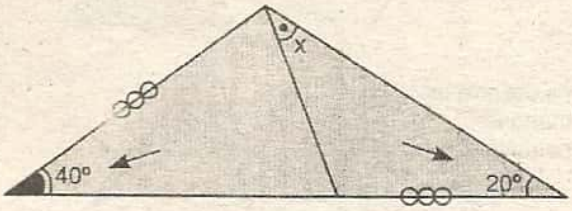
De la figura calcular "x"



SOLUCIÓN:

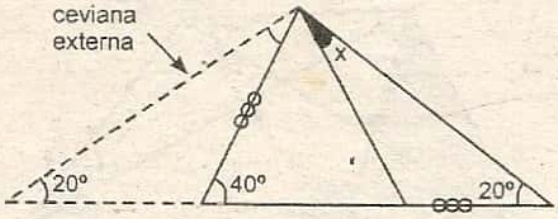
Paso Nº 1:

Se observa en el triángulo ángulos internos en la relación de 1 a 2 (20° y 40°)



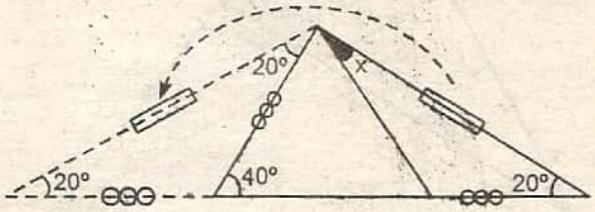
Paso Nº 2:

Aplicamos el primer criterio: pero ahora trazamos una ceviana externa de la siguiente manera.



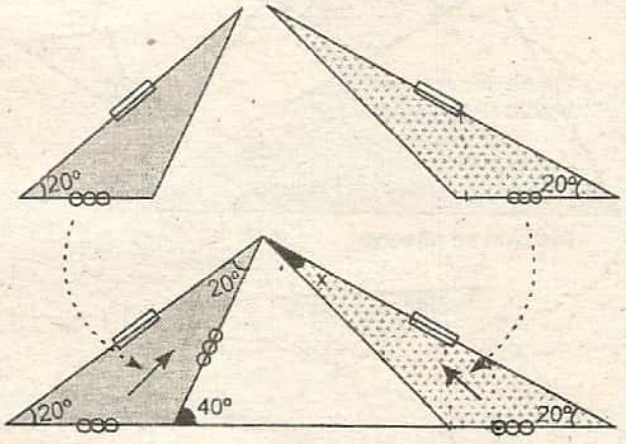
Paso Nº 3:

Completamos ángulos y se obtiene triángulos isosceles.



Paso Nº 4:

Ahora se observa en la figura, triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



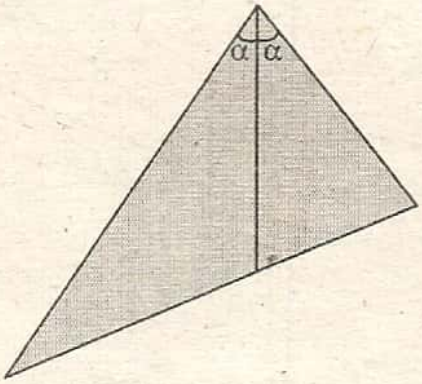
∴ Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"

$\Rightarrow x = 20°$

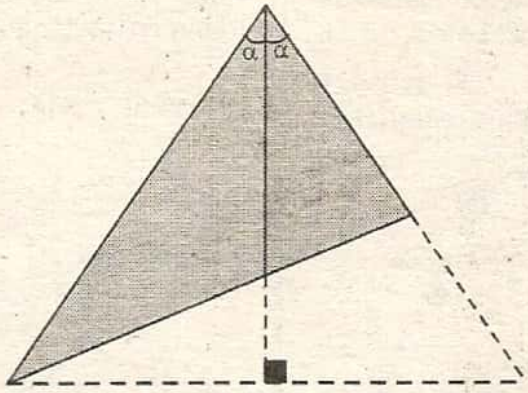
2do Criterio

"COMPLETANDO A UN TRIÁNGULO ISÓSCELES"

Cuando se observe en un triángulo una bisectriz interior, se buscará completarlo a un triángulo isósceles de la siguiente manera:

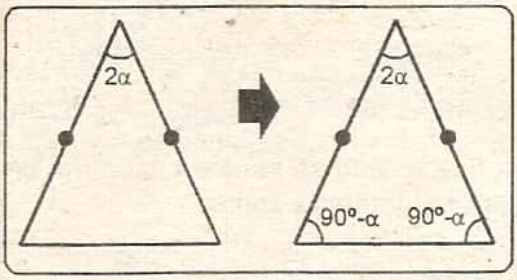


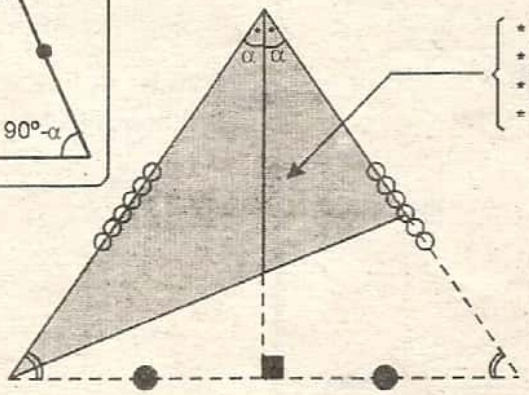
Se hará



Se obtiene

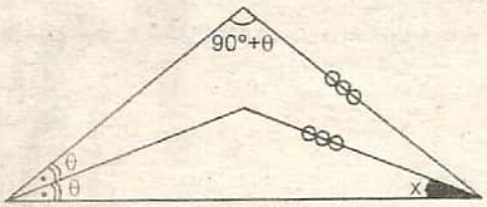
Tener presente





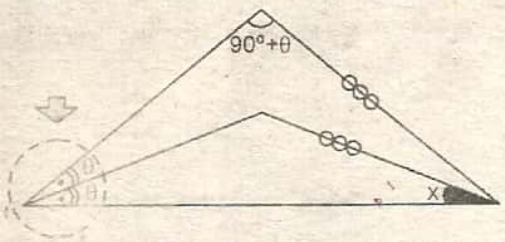
EJEMPLO Nº 1

Calcular "x"

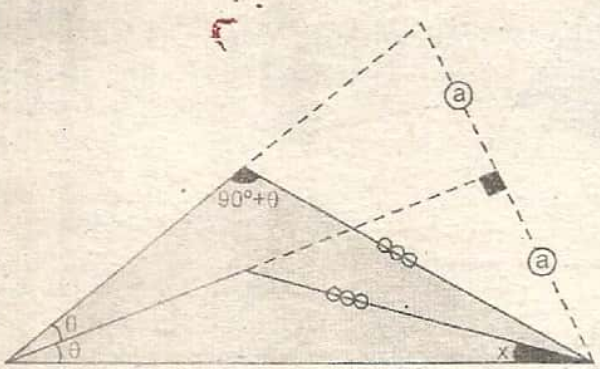


SOLUCIÓN:

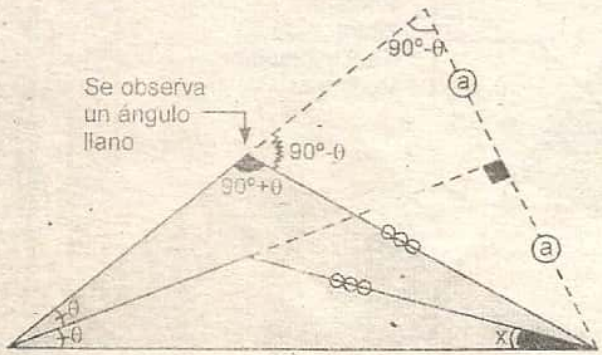
Se observa en la figura, un ángulo donde hay bisectriz interior.



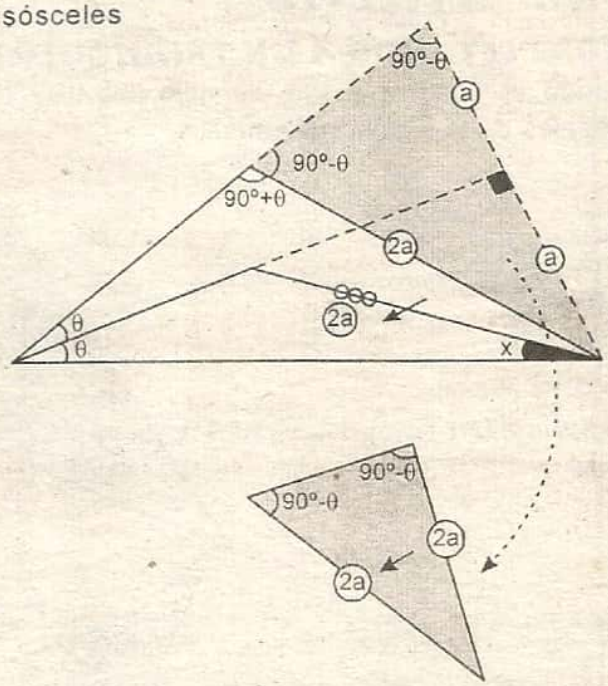
Paso Nº 1: Según el criterio #2, lo completamos para obtener un triángulo isósceles de la siguiente manera.



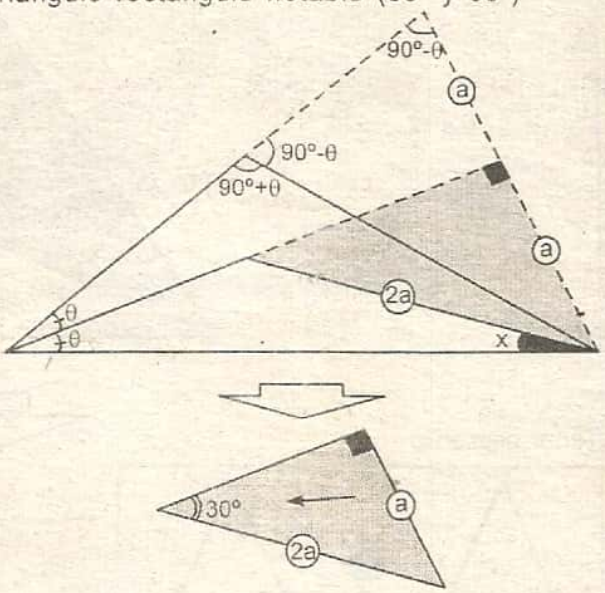
Paso Nº 2: Completamos ángulos internos en la figura.



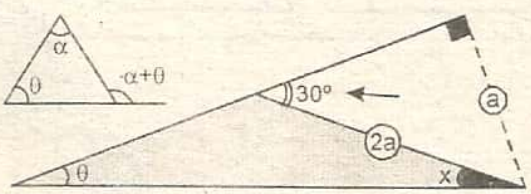
Paso Nº 3: En la figura se observa un triángulo isósceles



Paso Nº 4: Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable (30° y 60°)



Paso Nº 5: Finalmente se tiene en la figura, un triángulo que se presenta como:

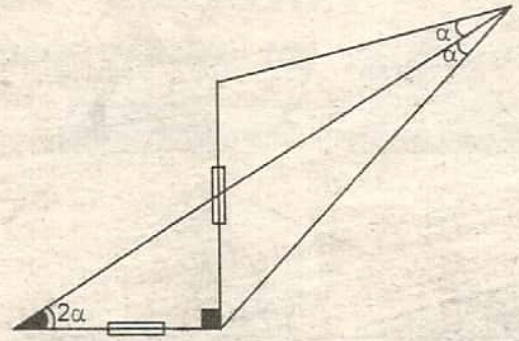


$\Rightarrow \quad \theta + x = 30°$

$x = 30° - \theta$

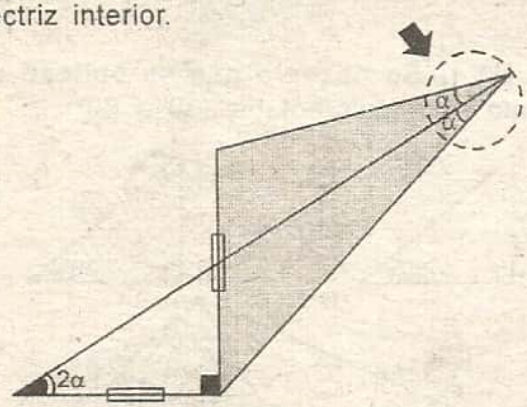
EJEMPLO Nº 2

Calcular " α "

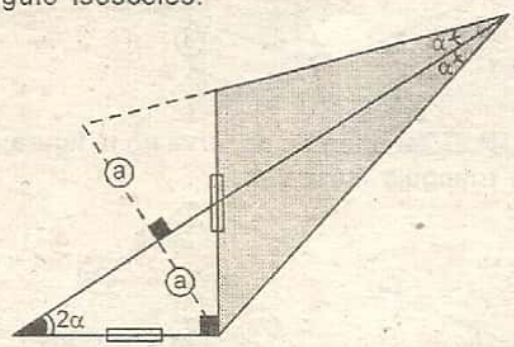


SOLUCIÓN:

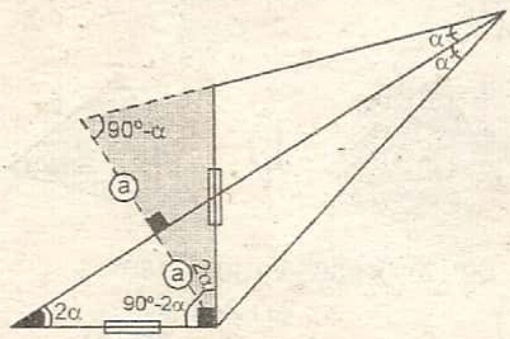
Se observa en la figura, un ángulo donde hay bisectriz interior.



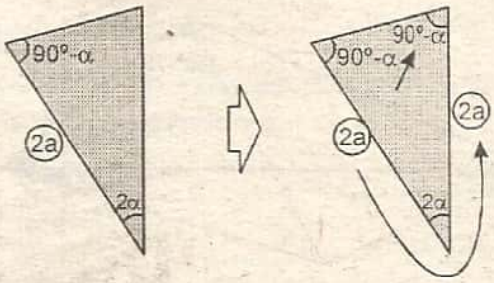
Paso Nº 1: Completamos para obtener un triángulo isósceles.

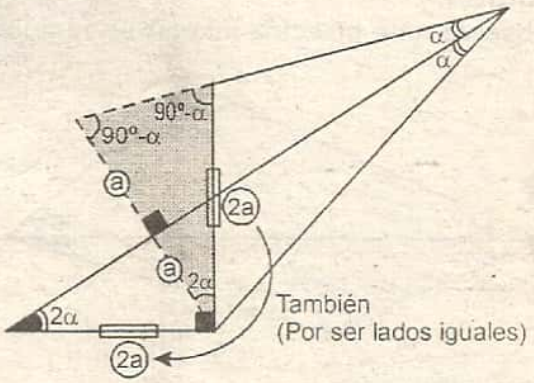


Paso Nº 2: Ahora completamos los ángulos internos del triángulo.

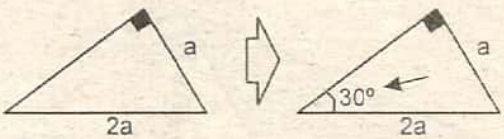


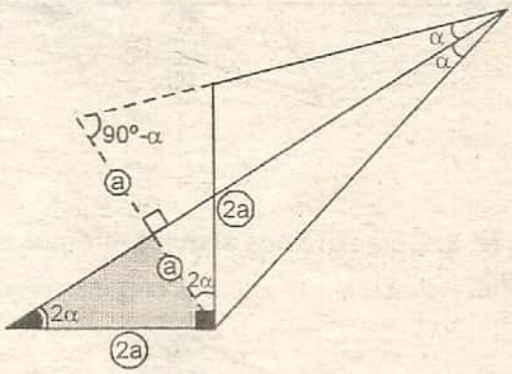
Paso Nº 3: En la nueva figura, se observa un triángulo isósceles de la siguiente forma.

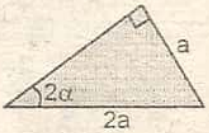




Paso Nº 4: Luego se obtiene un triángulo rectángulo notable: (30° y 60°)







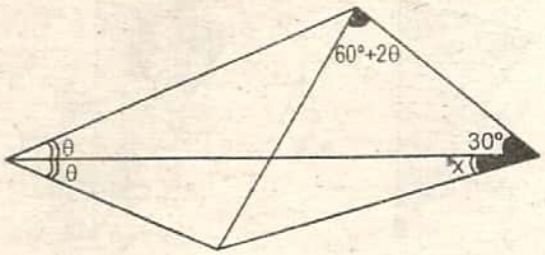
$\Rightarrow \quad 2\alpha = 30°$

$\alpha = 15°$

Toda mi física no pasa de una geometría. (Descartes)

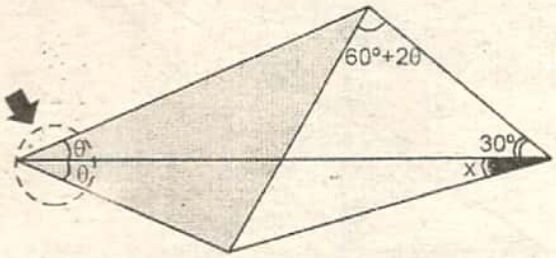
EJEMPLO Nº 3

Calcular "x"

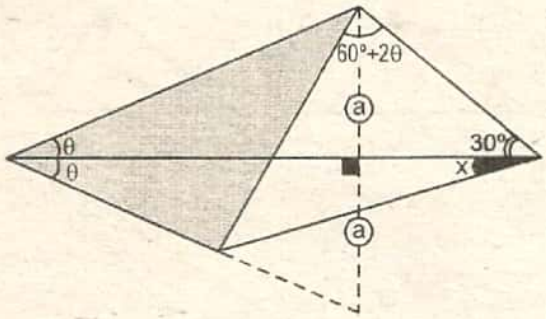


SOLUCIÓN:

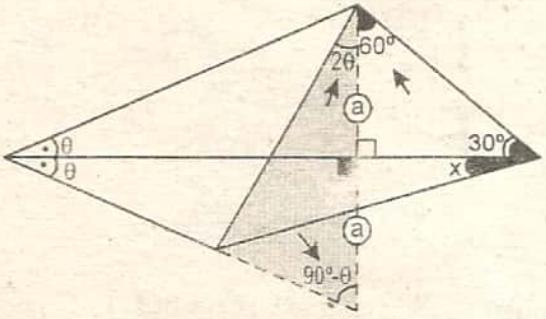
Se observa, una bisectriz interior en la figura.



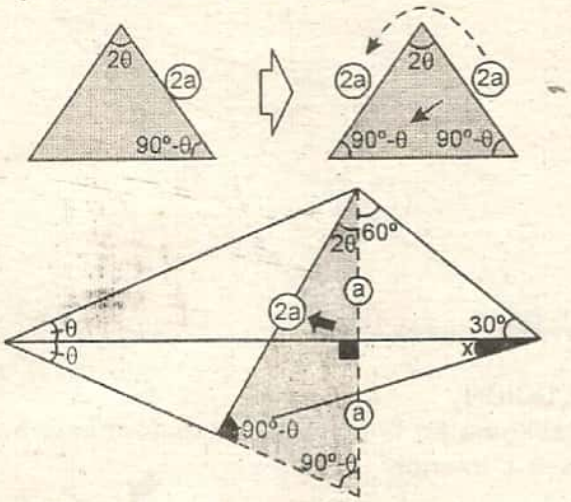
Paso Nº 1: Lo completamos para obtener un triángulo isósceles.



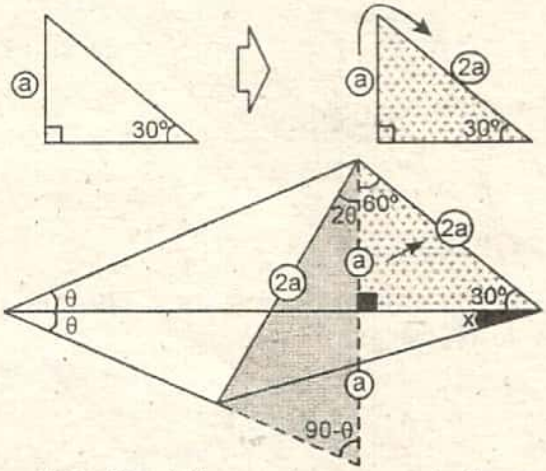
Paso Nº 2: Completamos ángulos internos en la figura.



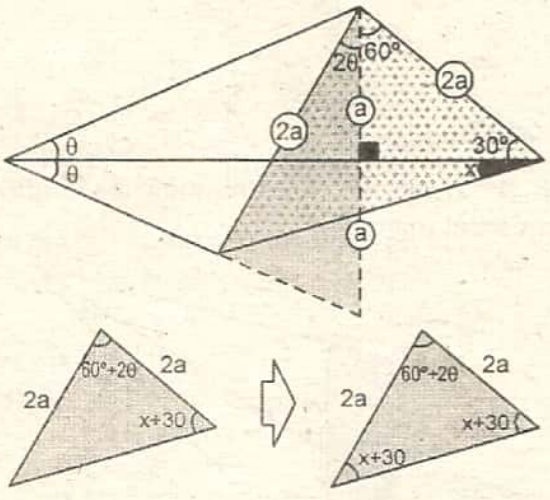
Paso Nº 3: En la nueva figura se observa, un triángulo isósceles de la siguiente forma:



Paso Nº 4: Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable (30° y 60°)



Paso Nº 5: También se observa en la figura, un nuevo triángulo isósceles.



$\therefore\ 60°+2\theta+x+30°+x+30° = 180°$

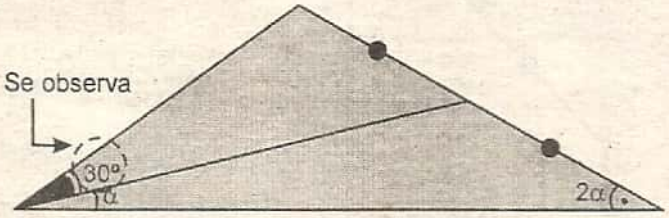
$2\theta+2x = 60°$

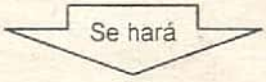
$x = 30°-\theta$

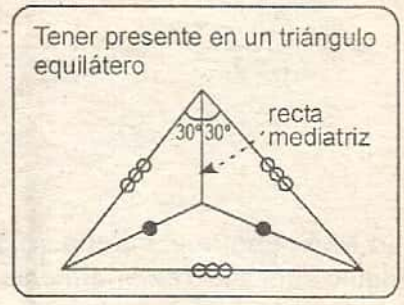
3er Criterio

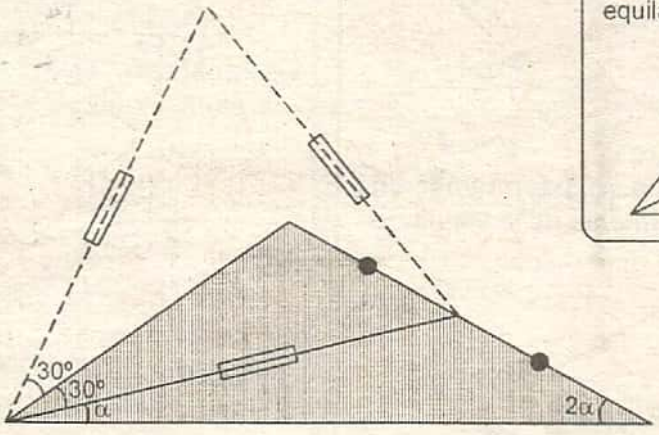
"COMPLETANDO UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO"

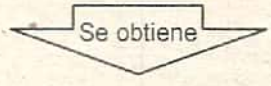
Cuando se observa en un triángulo un ángulo de 30° y como éste valor es la mitad de 60°, se buscará formar externamente un triángulo equilátero, de la siguiente manera.

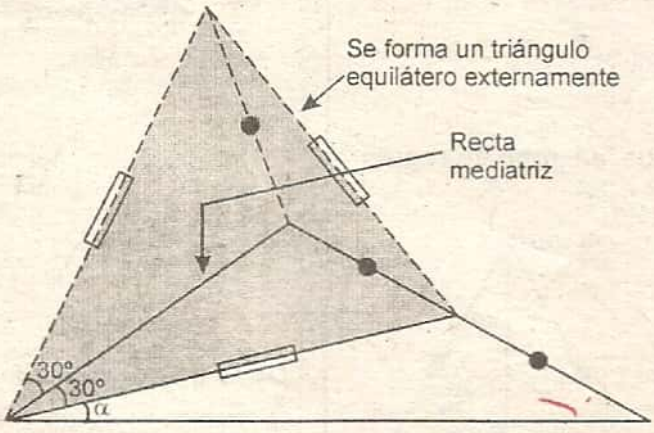








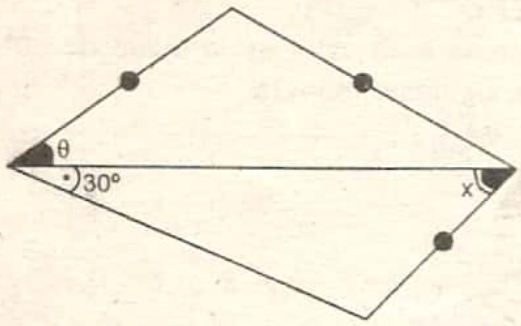




El mundo está cada vez más dominado por la matemática. (A.F. Rambaud)

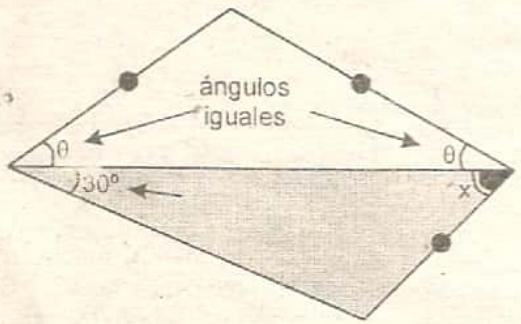
EJEMPLO Nº 1

Calcular "x"

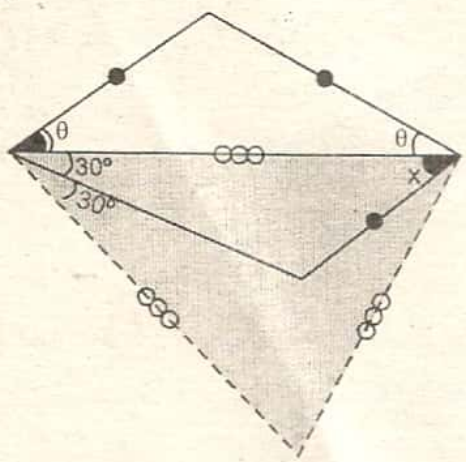


SOLUCIÓN:

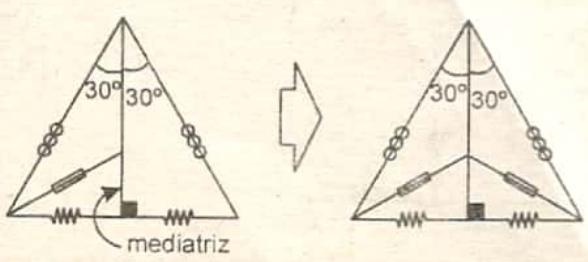
Se observa en la figura, un ángulo de 30°

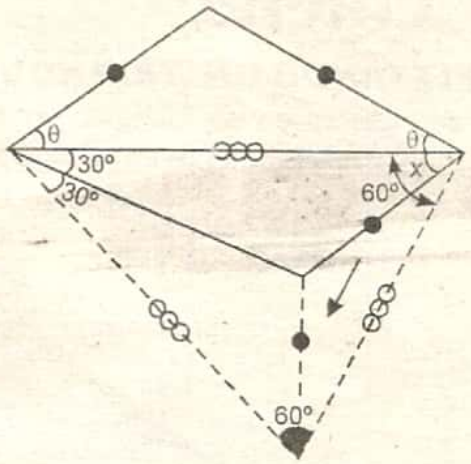


Paso Nº 1: Según el criterio Nº 3: formamos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera.

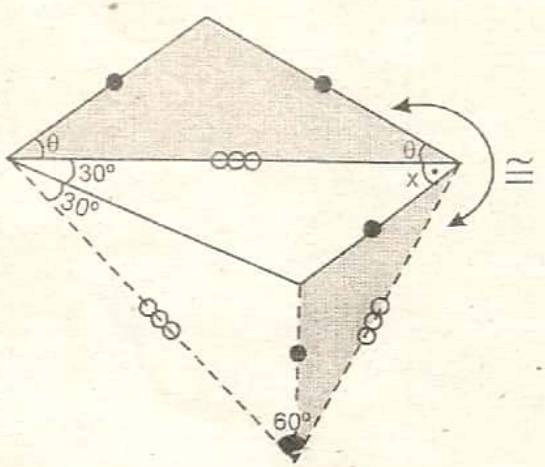


Paso Nº 2: Sabemos que en todo triángulo equilatero, se cumple:

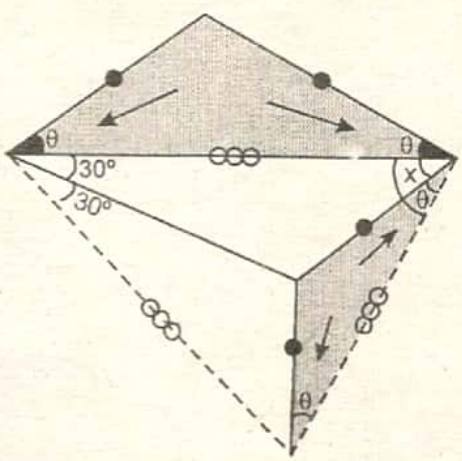




Paso Nº 3: Se observa que se obtiene dos triángulos congruentes, caso (lado-lado-lado)



Entonces se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



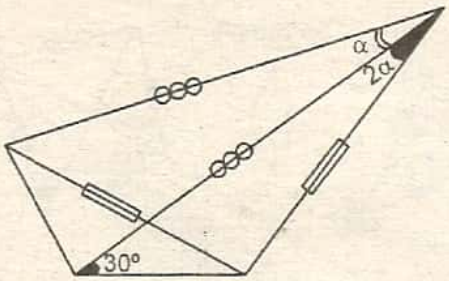
De la figura se tiene que:

$$\therefore\ x+\theta = 60^\circ$$

$$\Rightarrow\ x = 60^\circ - \theta$$

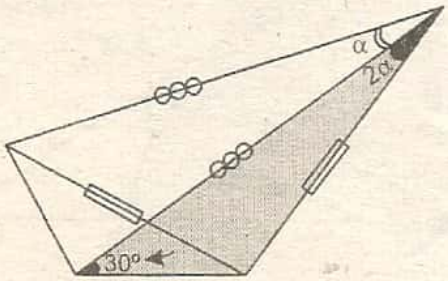
EJEMPLO Nº 2

Calcular " α "

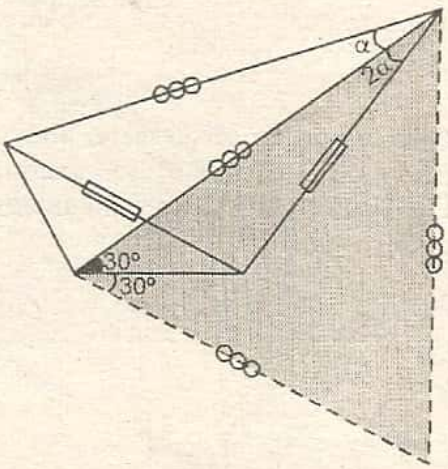


SOLUCIÓN:

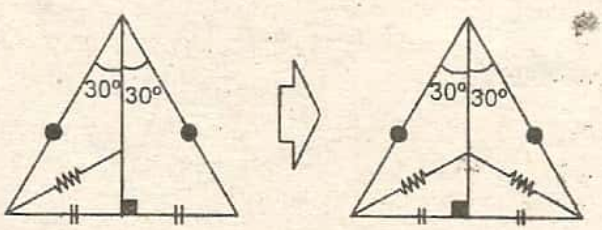
Se tiene en la figura, un ángulo de 30°

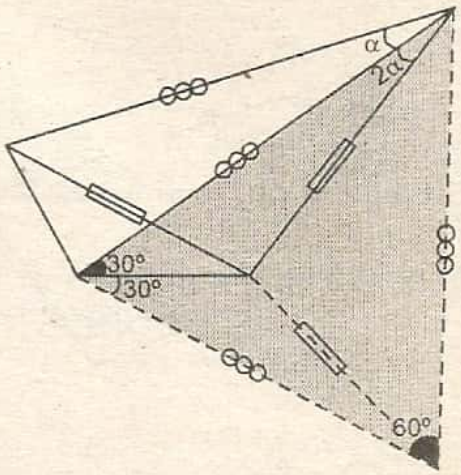


Paso Nº 1: Entonces formamos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera.

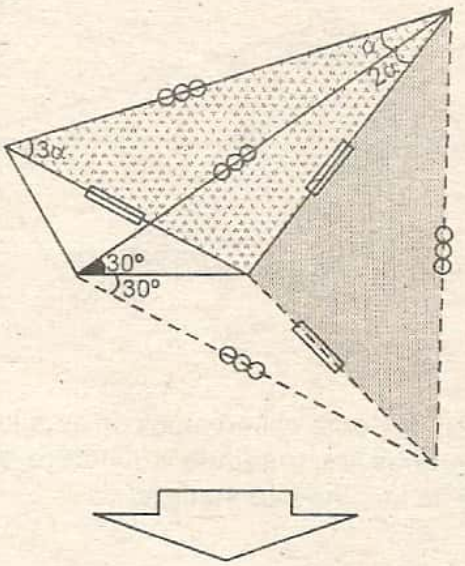


Paso Nº 2: Se sabe que en todo triángulo equilátero se cumple.



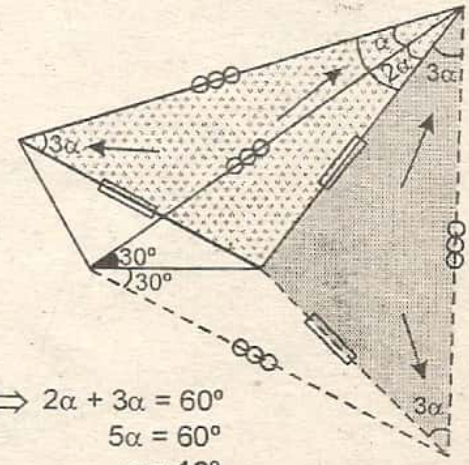


Paso Nº 3: Se observa en la figura que se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.L.L)



Aqui se cumple:

"A lados iguales se oponen angulos iguales"

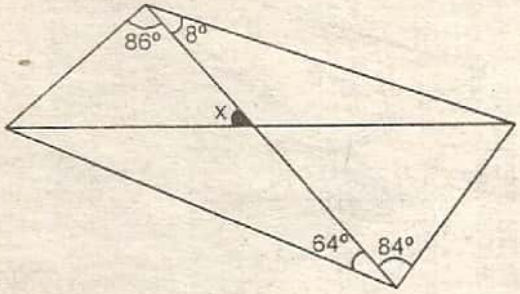


$\Rightarrow 2\alpha + 3\alpha = 60°$

$5\alpha = 60°$

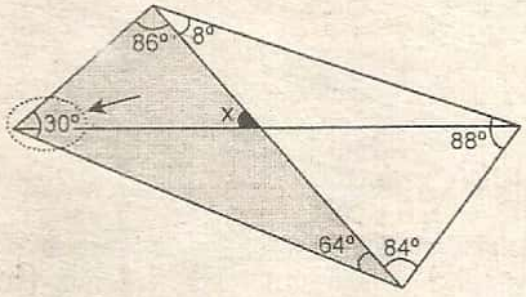
$\alpha = 12°$

EJEMPLO Nº 3

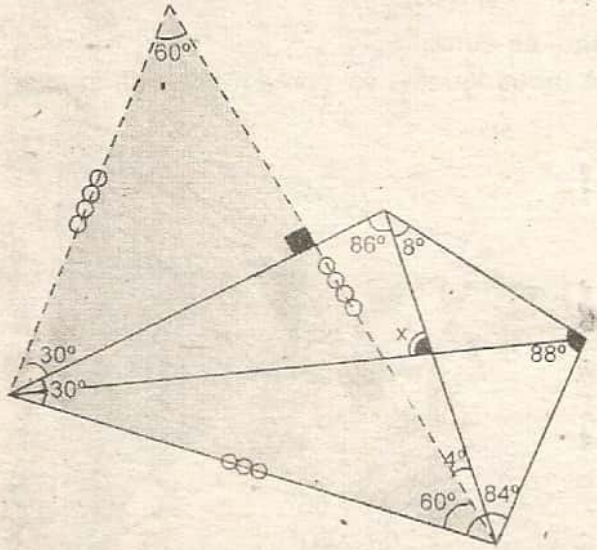


SOLUCIÓN:

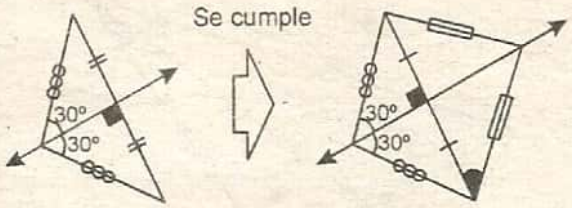
Primero completamos los ángulos de la figura y se observa un ángulo de 30°

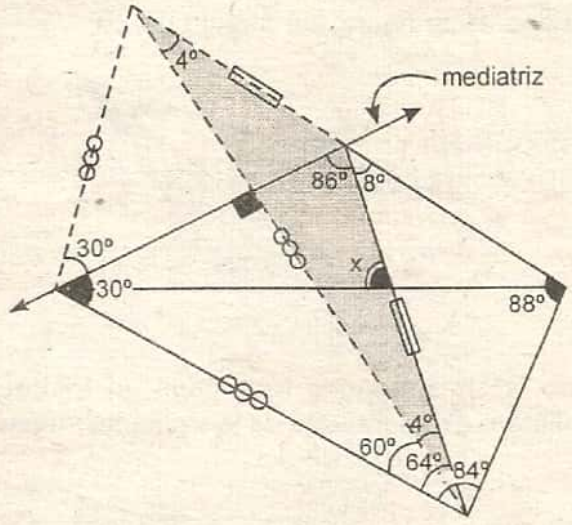


Paso Nº 1: Como observamos un ángulo de 30°, construimos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera.

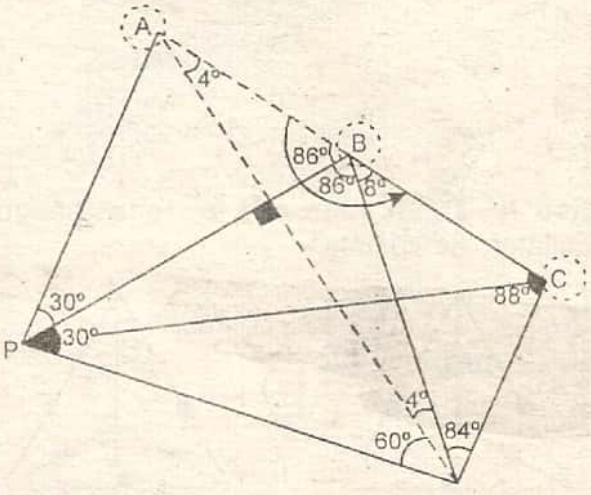


Paso Nº 2: Se observa en la figura una recta mediatriz.

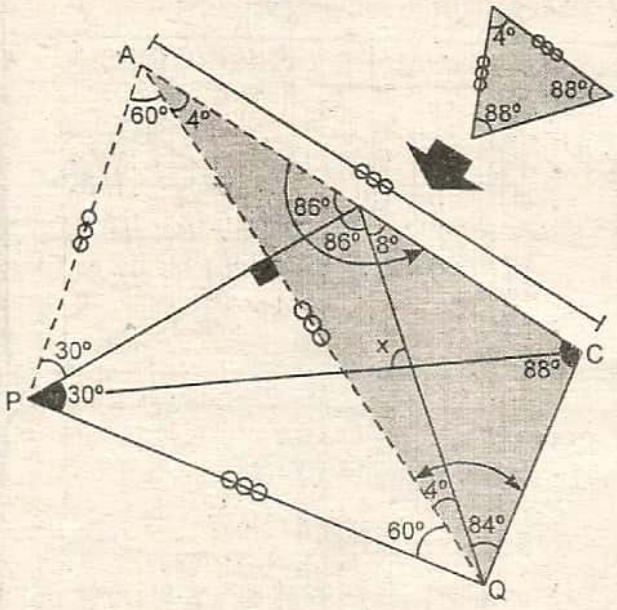




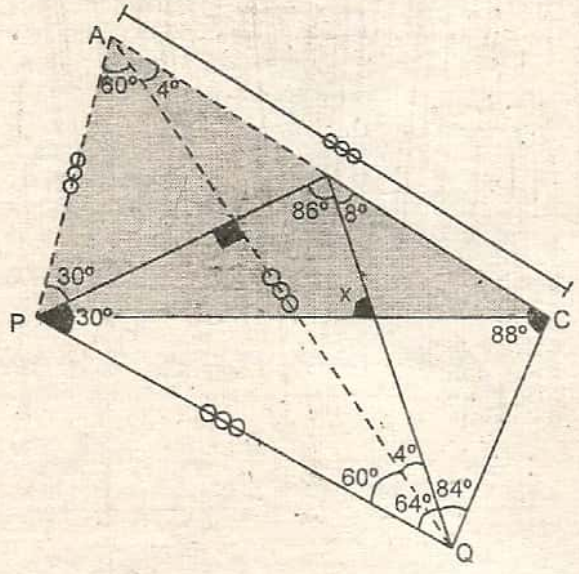
Paso Nº 3: Luego se observa un ángulo llano, en "B" (86° + 86° + 8° = 180°) lo cual nos indica que los vertices A, B y C son colineales.



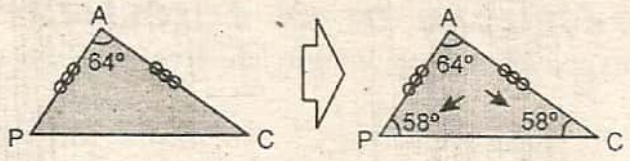
Paso N° 4: Luego se observa un triángulo isósceles donde AQ = AC.



Paso N° 5: Se observa ahora un nuevo triángulo isósceles PAC donde (PA = AC)

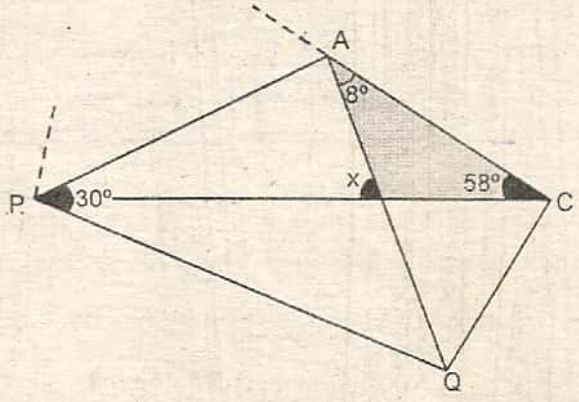


De aquí:



Paso N° 6: Ahora interiormente de la figura se tiene un triángulo donde cumple:

$m\measuredangle ACP = 58°$



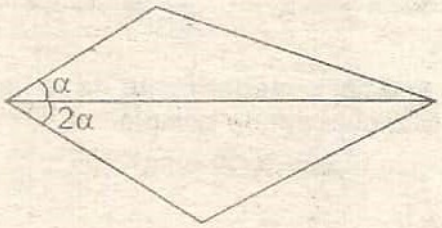
$\Rightarrow \quad x = 58° + 8°$

$x = 66°$

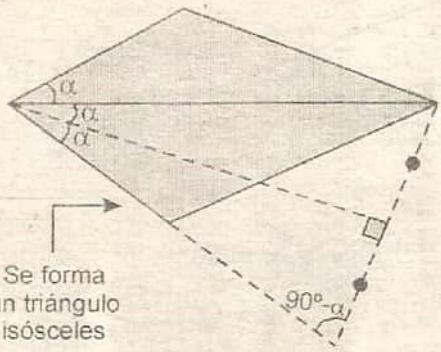
4to Criterio

"PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ"

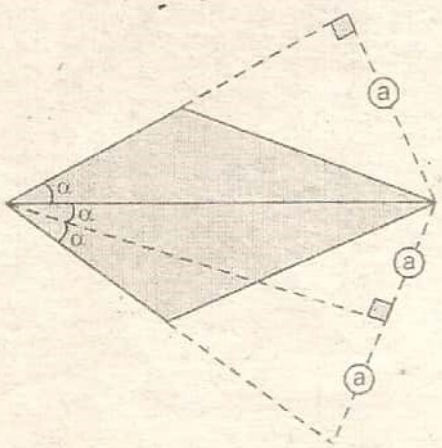
Cuando se observa en una figura de la siguiente forma se realizará el siguiente trazo:



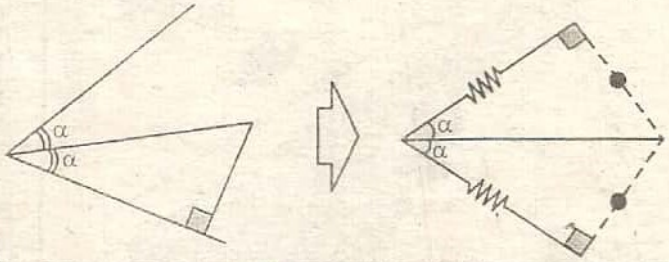
Se hará



Se realiza el siguiente trazo para obtener la siguiente figura:

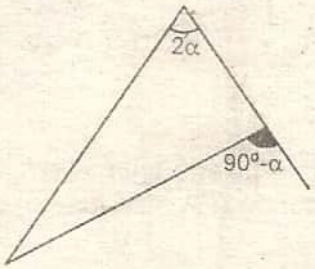


Se sabe: PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ:

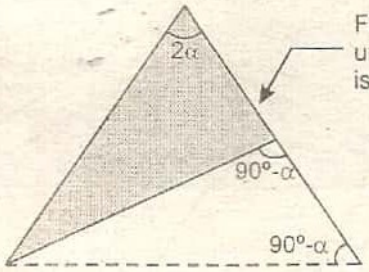


Tener presente:

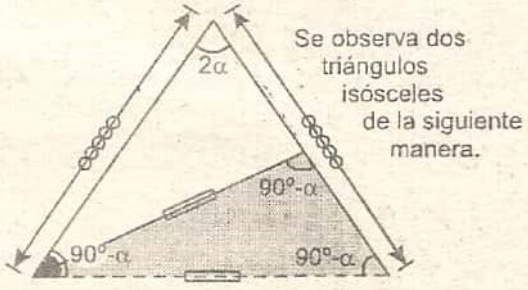
Si se observa la siguiente figura:



Se hará



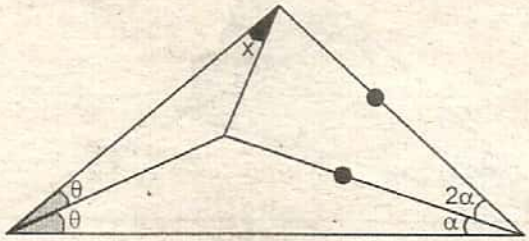
Se obtiene



Sin la matemática no nos sería posible comprender muchos pasajes de las sagradas escrituras. (San Agustín)

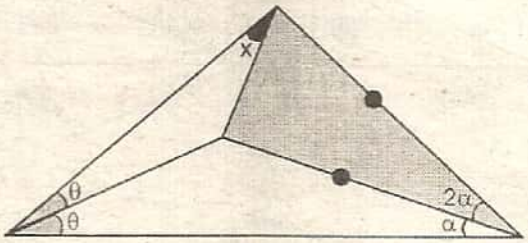
EJEMPLO Nº 1

Calcular "x"

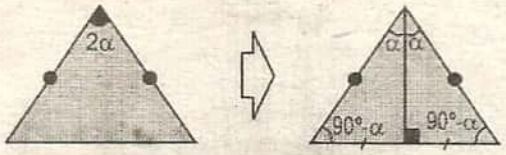


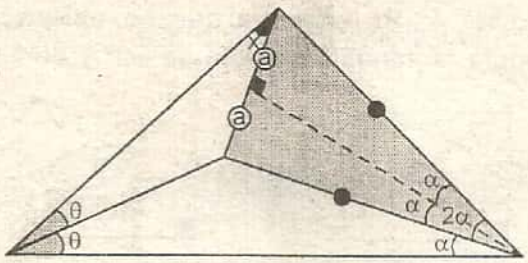
SOLUCIÓN:

Se observa un triángulo isósceles.

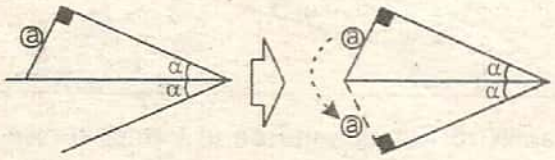


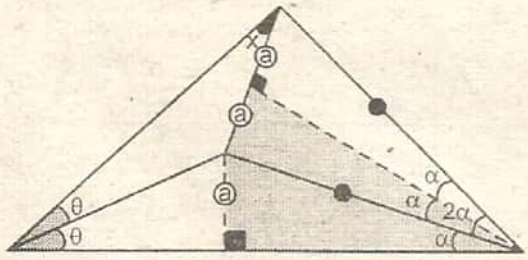
Paso Nº 1: Aquí se realiza el siguiente trazo:



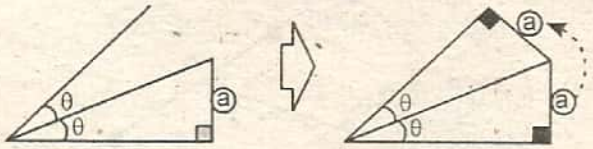


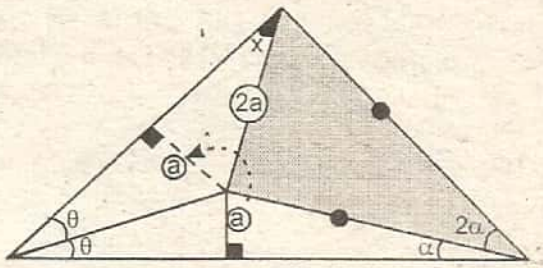
Paso Nº 2: Luego se observa en la figura que se obtiene:



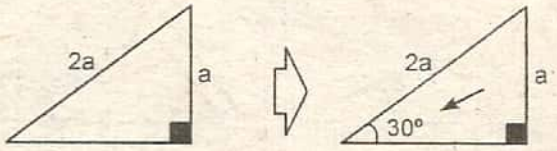


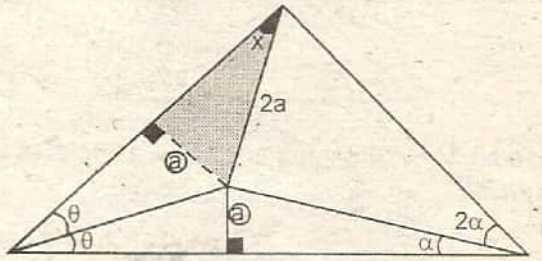
Paso Nº 3: De la misma manera se obtiene:





Paso Nº 4: Se observa un triángulo rectángulo.

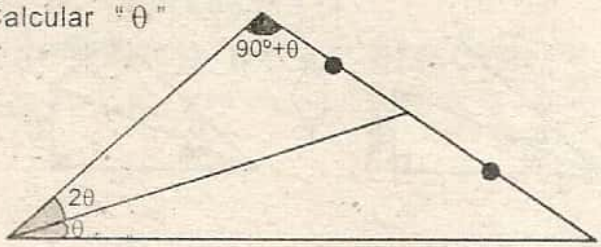




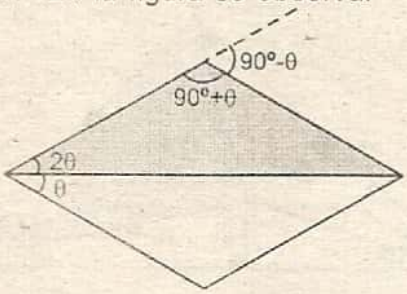
$\Rightarrow$ **x = 30°**

EJEMPLO Nº 2

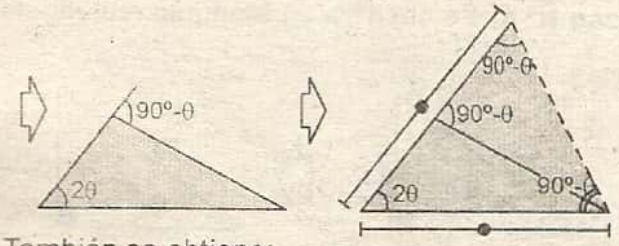
Calcular " θ "



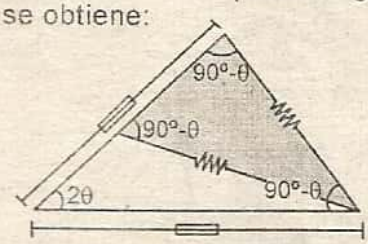
Solución: En la figura se observa:



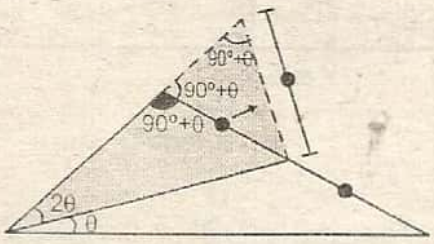
Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera.



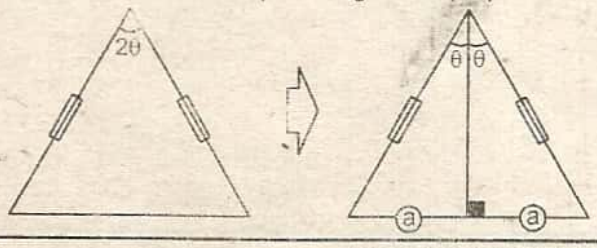
También se obtiene:

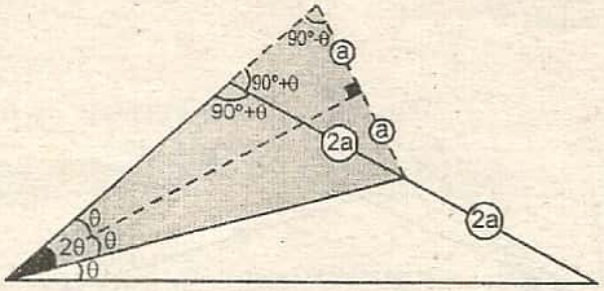


Paso Nº 1: Realizamos en la figura inicial el trazo sugerido:

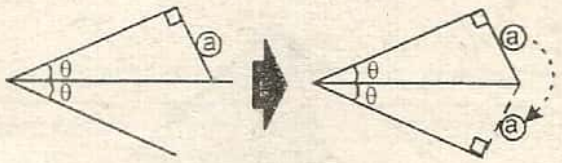


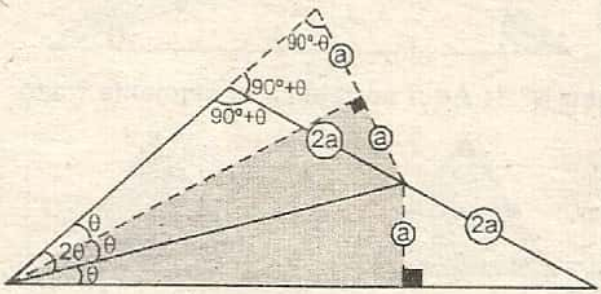
Paso Nº 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple la siguiente propiedad



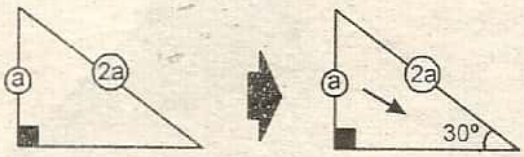


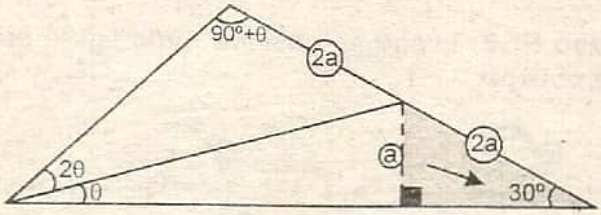
Paso Nº 3: Luego se observa en la figura que se tiene la siguiente propiedad.



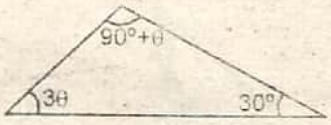


Paso Nº 4: Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°.





Paso Nº 5: Finalmente en el triángulo total se tiene:



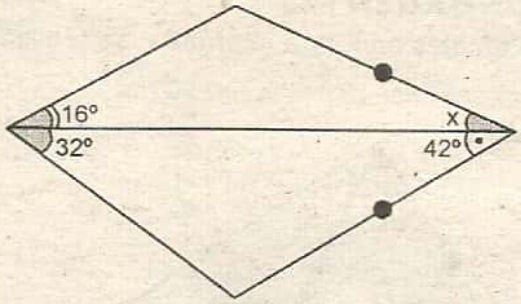
$$90^\circ+\theta+3\theta+30^\circ = 180^\circ$$

$$4\theta = 60^\circ$$

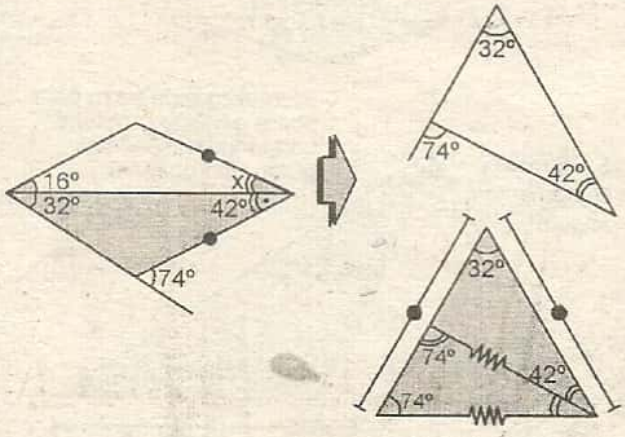
$$\theta = 15$$

EJEMPLO Nº 3

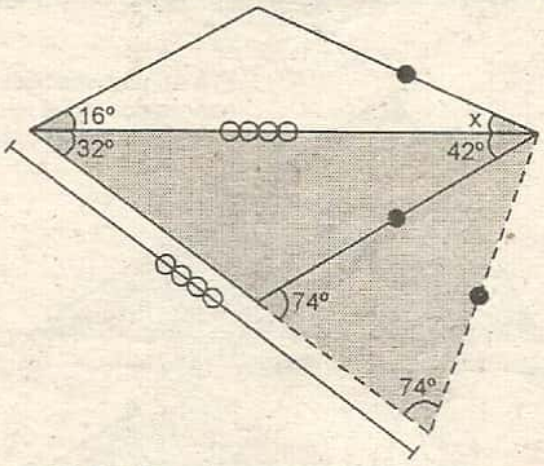
Hallar "x"



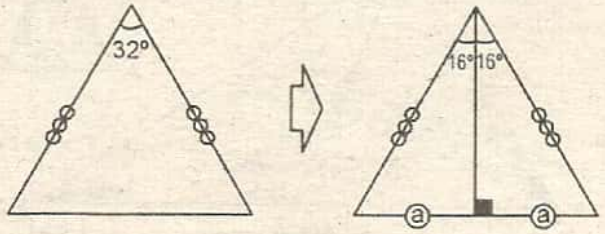
Solución: En la figura se observa que podemos realizar el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera.

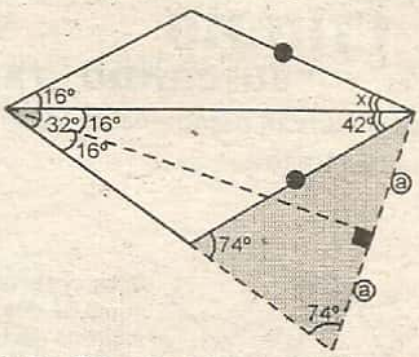


Paso Nº 1: Realizamos el trazo sugerido en la figura

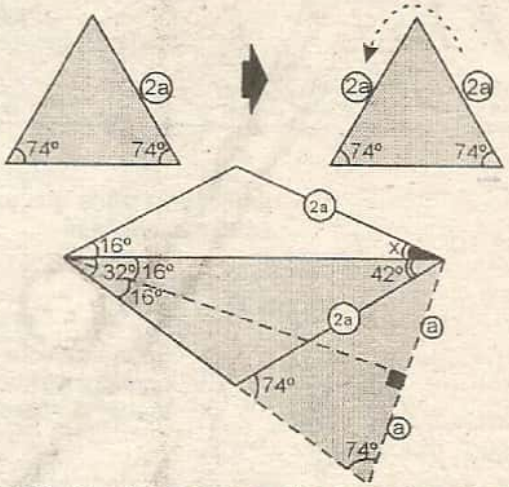


Paso Nº 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:

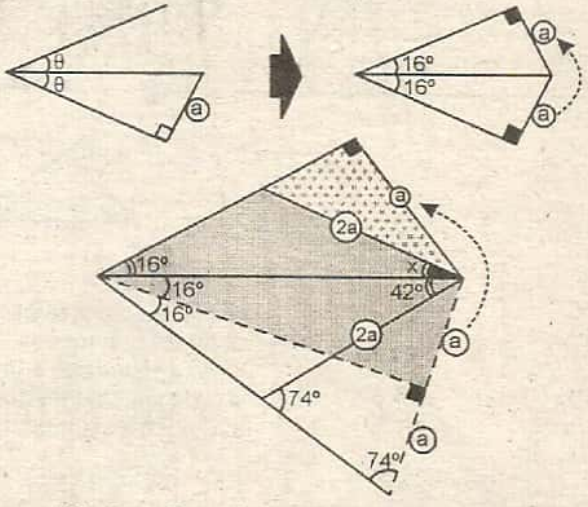




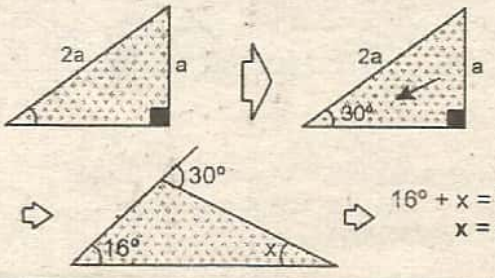
Paso Nº 3: Se observa también un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



Paso Nº 4: Luego se observa la siguiente propiedad en donde se cumple:



Paso Nº 5: Se observa que se obtiene un triángulo notable de 30° y 60°

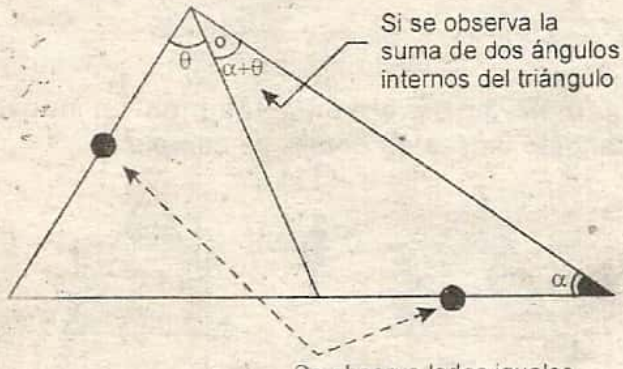


5to Criterio

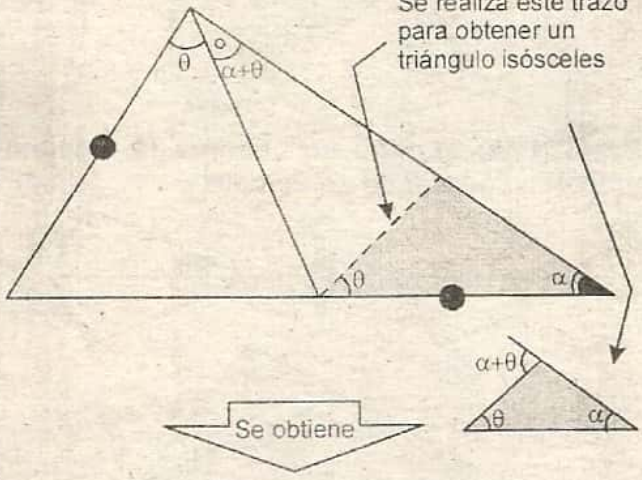
"BUSCANDO TRIÁNGULOS CONGRUENTES"

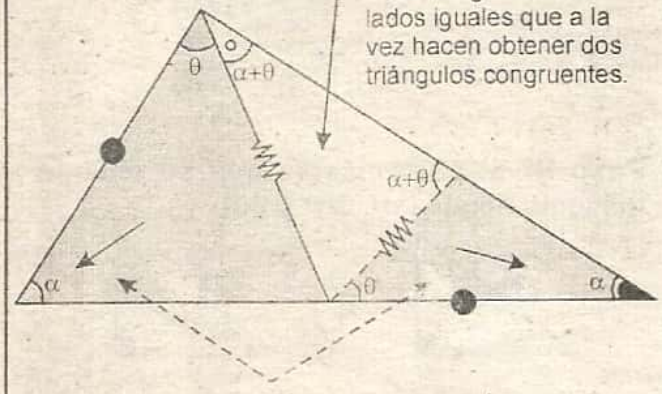
Cuando se observan triángulos de las siguientes con lados iguales en forma alternada, se realizaran los siguientes trazos.

CASO I



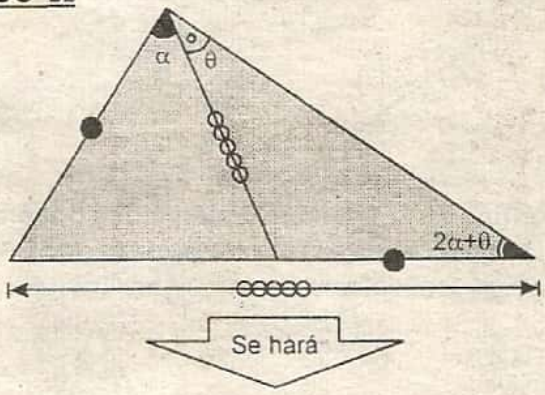
Se hará

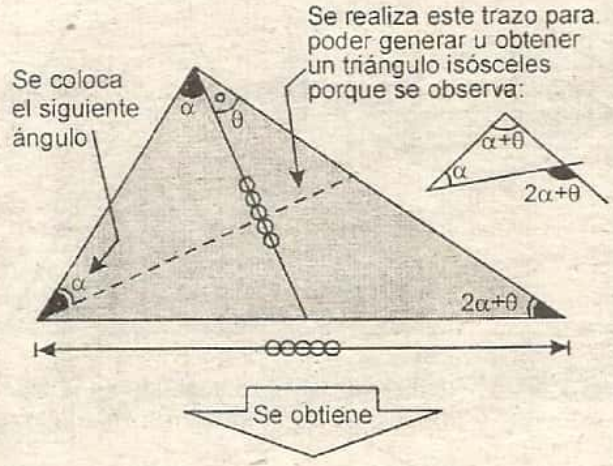


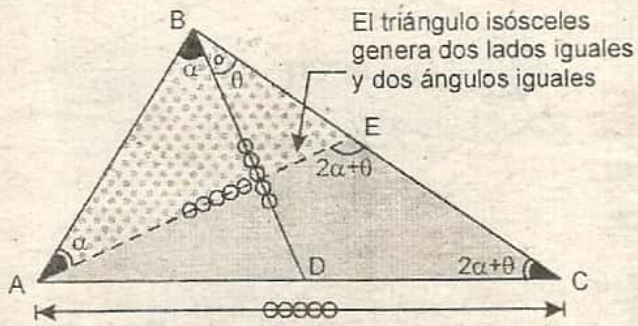


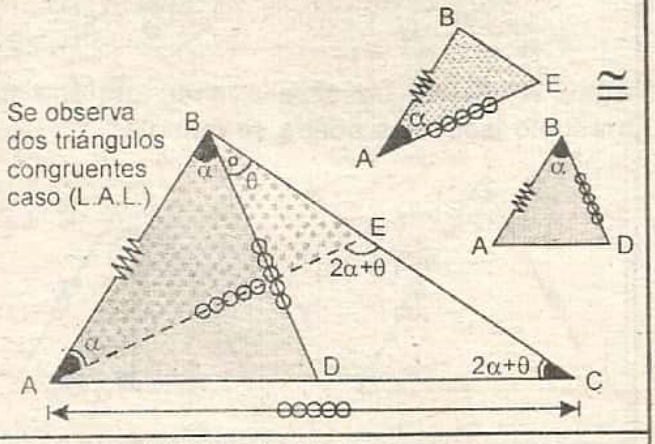
Se obtienen dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.) y se aplica el principio de la congruencia.

CASO II



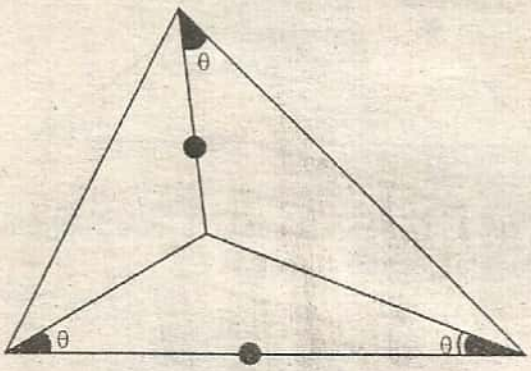




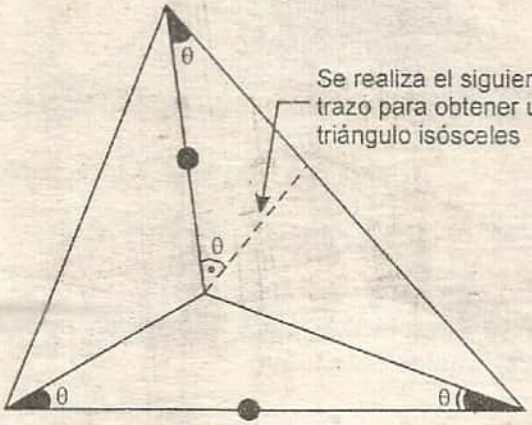


CASO III

Si tenemos la siguiente figura con las siguientes características.

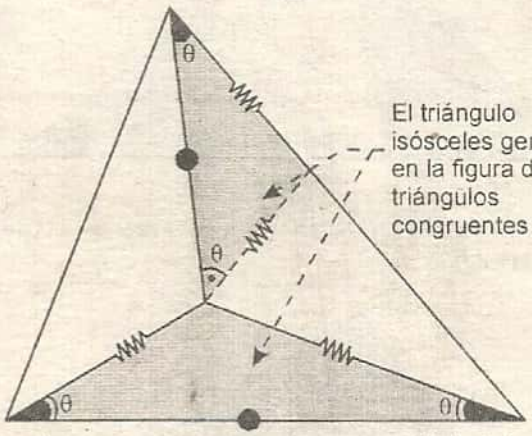


Se hará



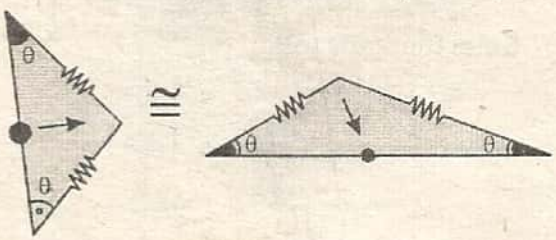
Se realiza el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles

Se obtiene



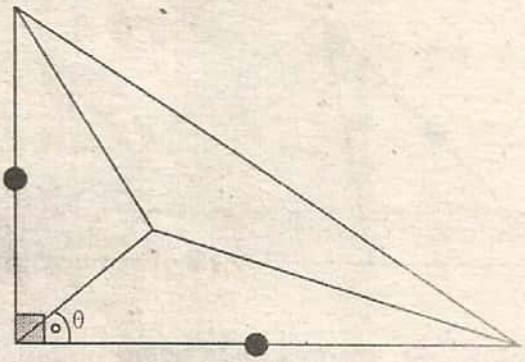
El triángulo isósceles genera en la figura dos triángulos congruentes

Se observa congruencia, caso (A.L.A.)

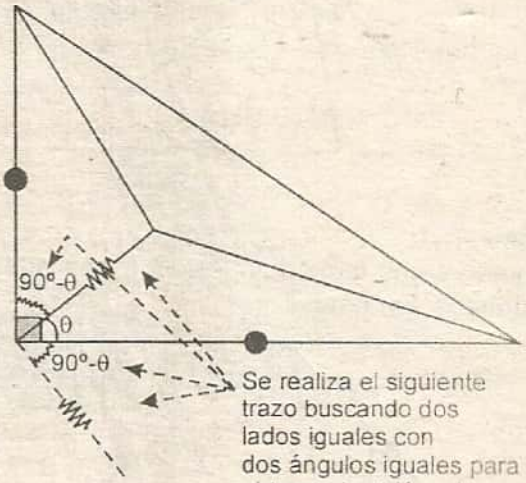


CASO IV

Si tenemos la siguiente figura con la siguiente característica.

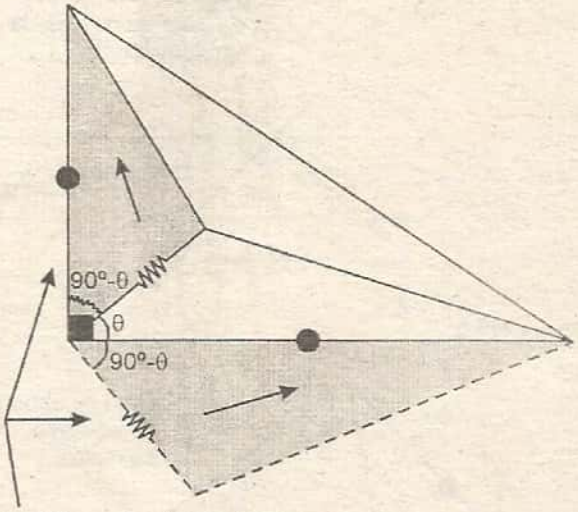


Se hará



Se realiza el siguiente trazo buscando dos lados iguales con dos ángulos iguales para obtener dos triángulos congruentes.

Se obtiene

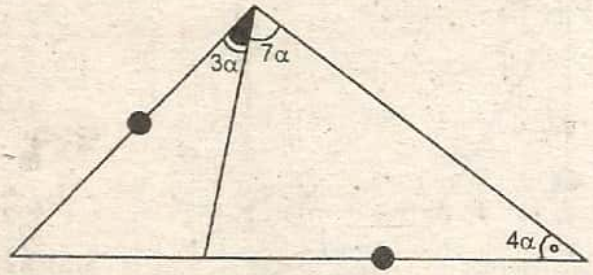


Se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)
entonces se aplica "a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"

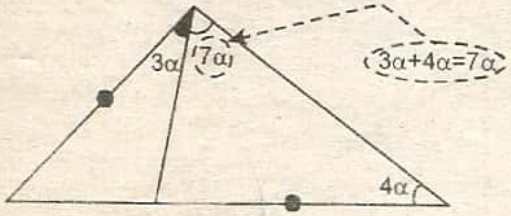
Dios es el gran geómetra. Dios geometriza sin cesar. (Platón)

EJEMPLO Nº 1

Calcular "α":

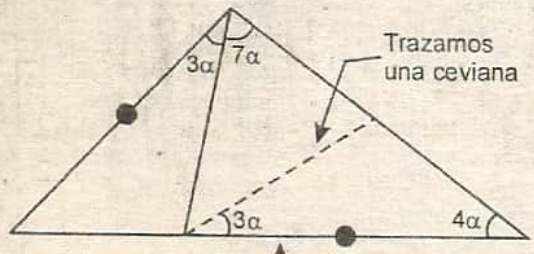


Solución: Se observa en la figura.

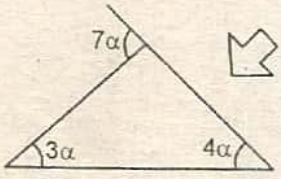


Paso Nº 1:

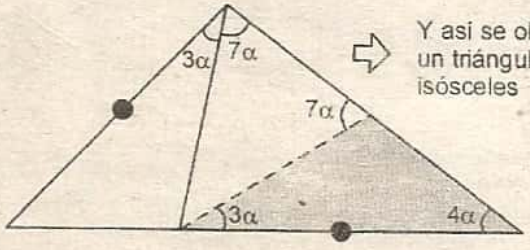
Como vemos lados iguales en forma alternada entonces hacemos.



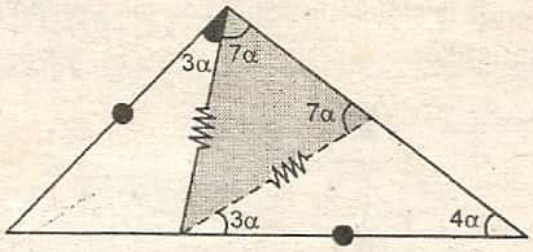
colocamos un ángulo de 3α para obtener la siguiente figura.



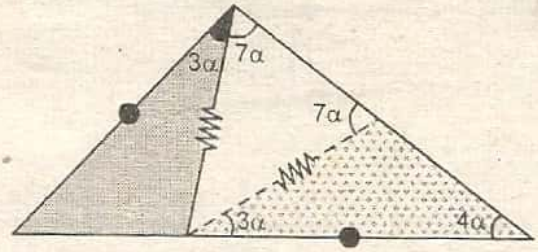
Paso Nº 2:



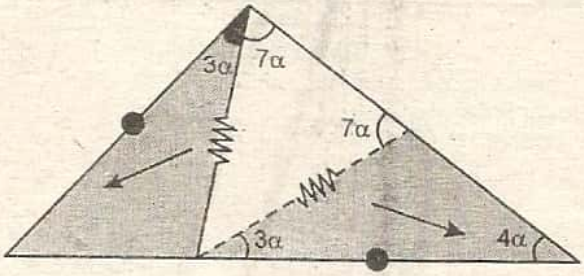
Y así se obtiene un triángulo isósceles



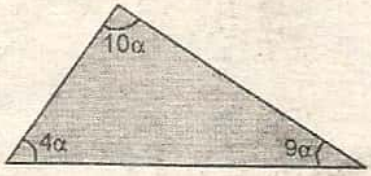
Paso Nº 3: Luego se observa dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Luego se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



Paso Nº 4:



⇒ En el triángulo total.

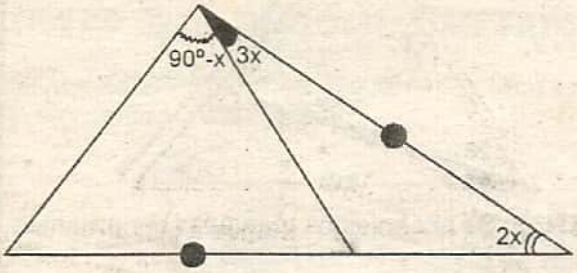
$$4\alpha + 3\alpha + 7\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$18\alpha = 180^\circ$$

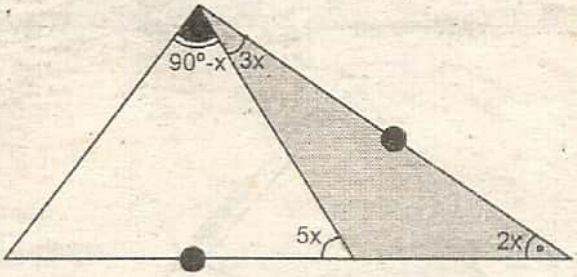
$$\alpha = 10^\circ$$

EJEMPLO Nº 2

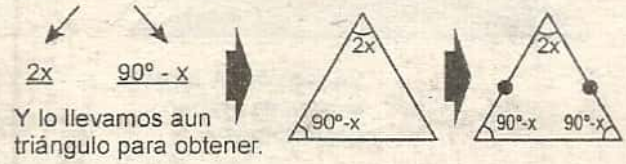
Calcular "x"



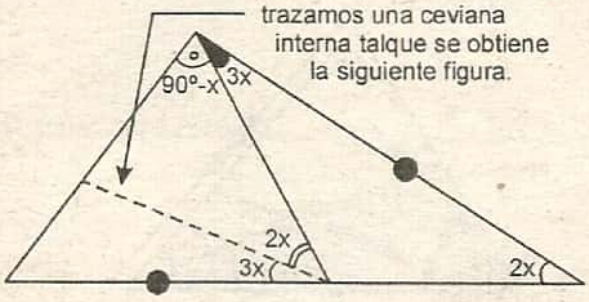
Solución: En la figura:



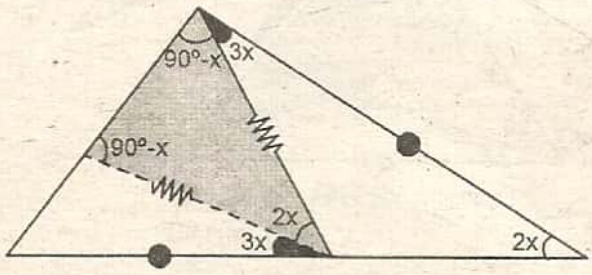
Luego se ve los ángulos



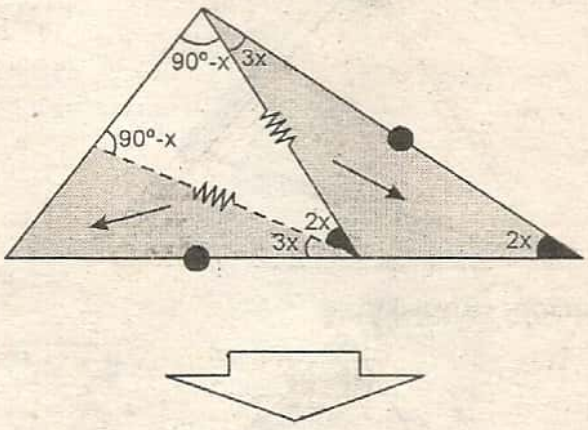
Paso Nº 1:



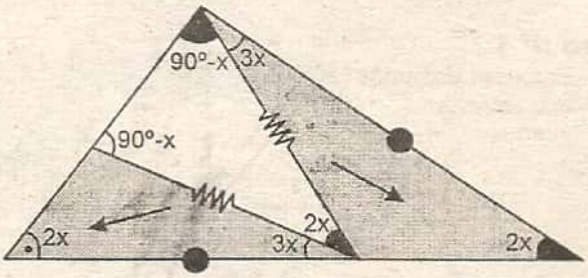
Se observa un triángulo isósceles



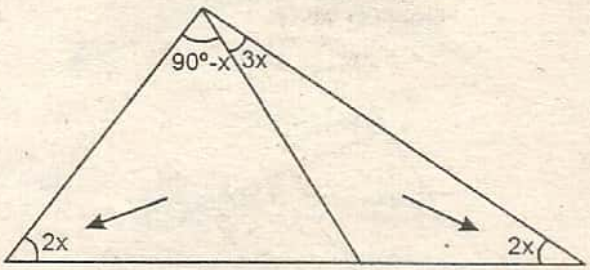
Paso Nº 2: Ahora observamos dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Luego se cumple:
"A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"



Paso Nº 3:
Finalmente se obtiene la siguiente figura.



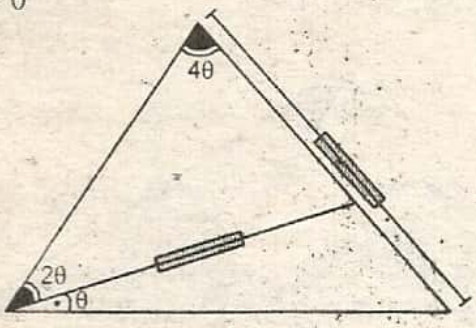
Luego: $2x + 90° - x + 3x + 2x = 180°$

$6x = 90°$

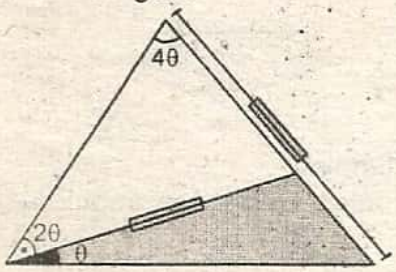
$x = 15°$

EJEMPLO Nº 3

Hallar θ

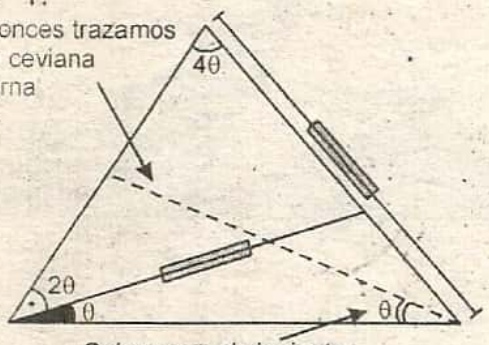


Solución: En la figura.

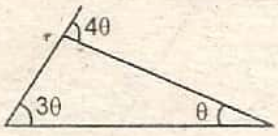


Paso Nº 1:

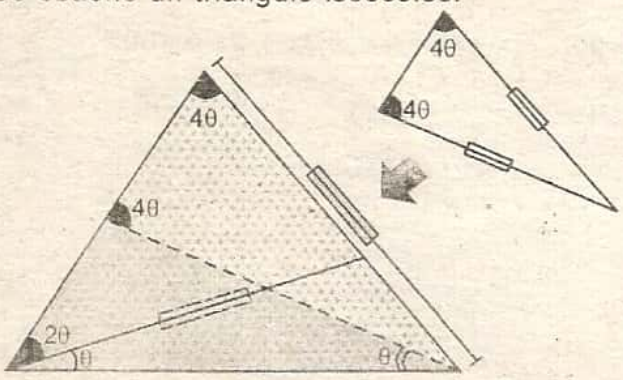
Entonces trazamos una ceviana interna



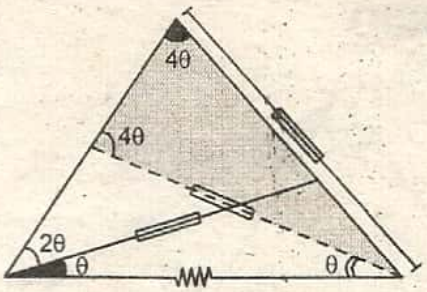
Colocamos el siguiente ángulo para obtener la siguiente figura



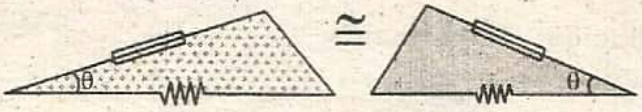
Se obtiene un triángulo isósceles.

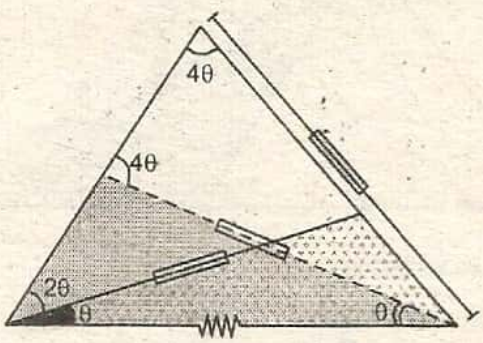


Luego:

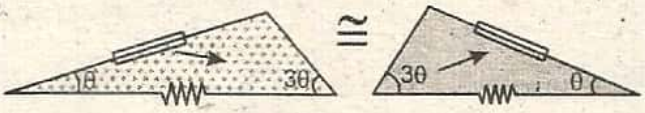


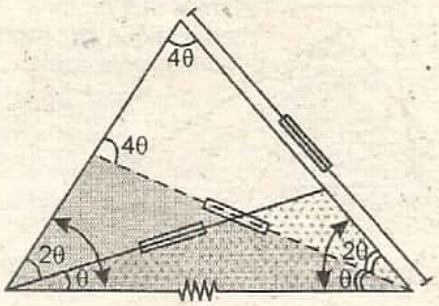
Paso Nº 2: Se observa dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



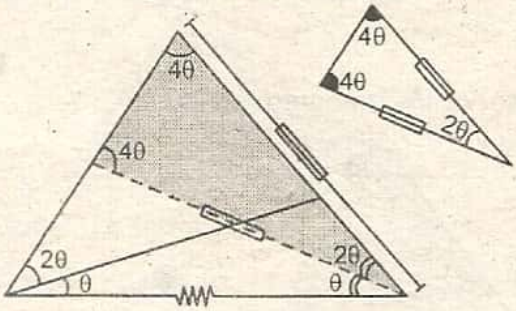


Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"





Paso Nº 3: Finalmente se observa.



$$\Rightarrow \quad 4\theta + 4\theta + 2\theta = 180^\circ$$

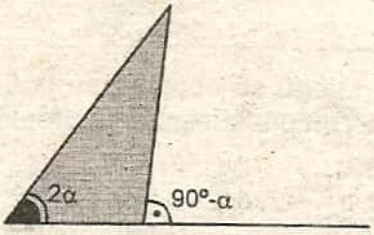
$$10\theta = 180^\circ$$

$$\theta = 18^\circ$$

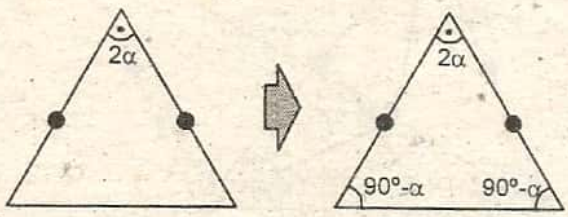
6to Criterio

"TRAZO DEL ÁNGULO SIMÉTRICO (ESPEJO)"

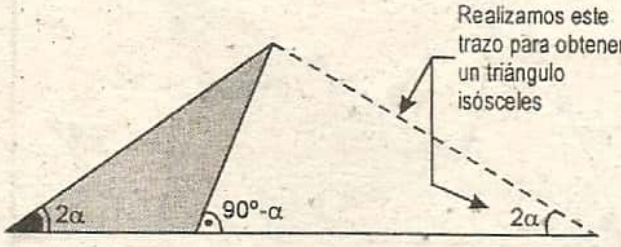
CASO I: Si observamos la siguiente figura con las siguientes características.



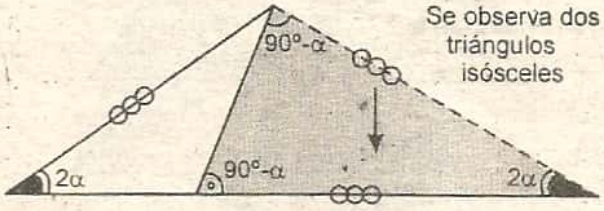
Se buscará

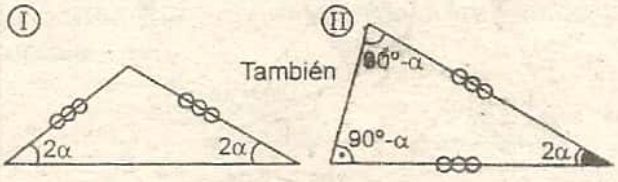


Ahora hacemos

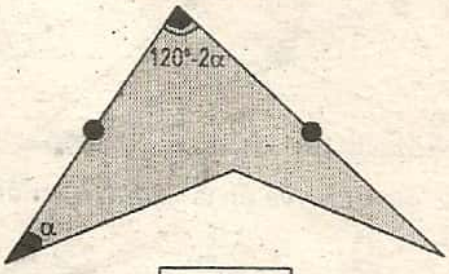


Se obtiene

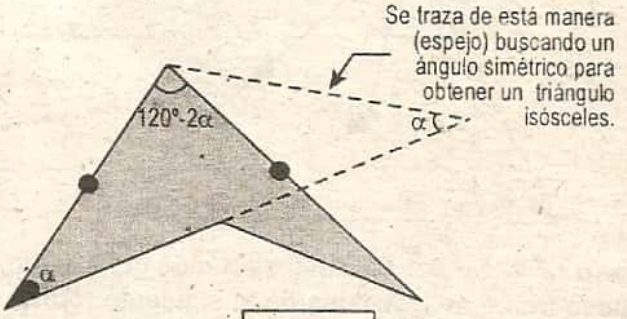




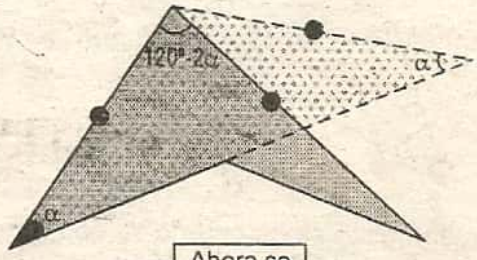
CASO II: Si tenemos está figura con las siguientes características.



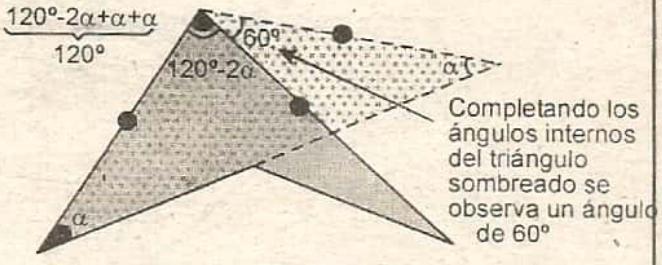
Se hará



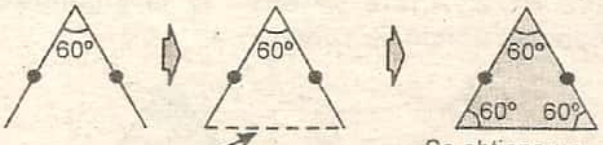
Se obtiene



Ahora se observa

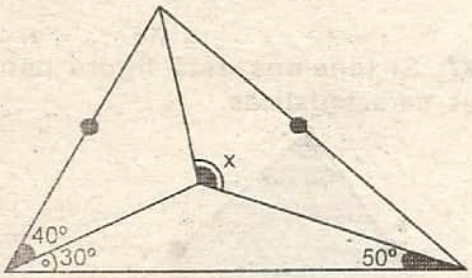


Ahora aplicamos

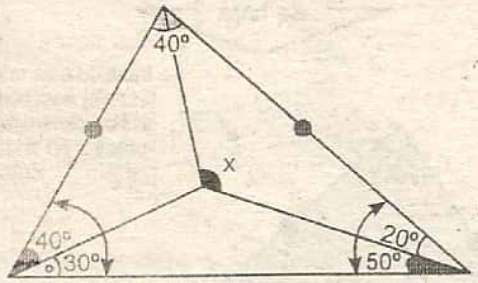


EJEMPLO Nº 1

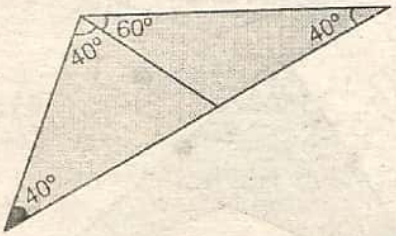
Calcular "x":



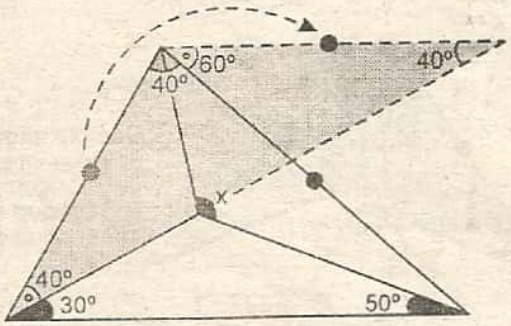
Solución: Se observa en la figura, un triángulo isósceles.



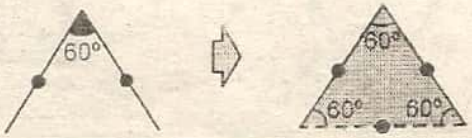
Paso Nº 1: Se observa que se puede obtener un nuevo triángulo isósceles de la siguiente forma:

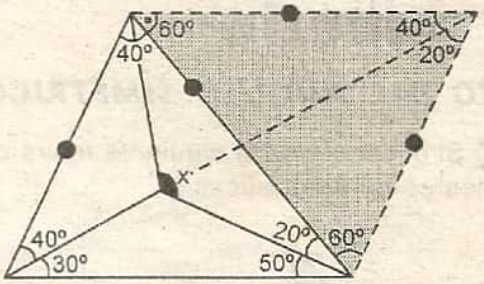


⇒ Empleamos el sexto criterio de construcción para obtener el triángulo anterior.

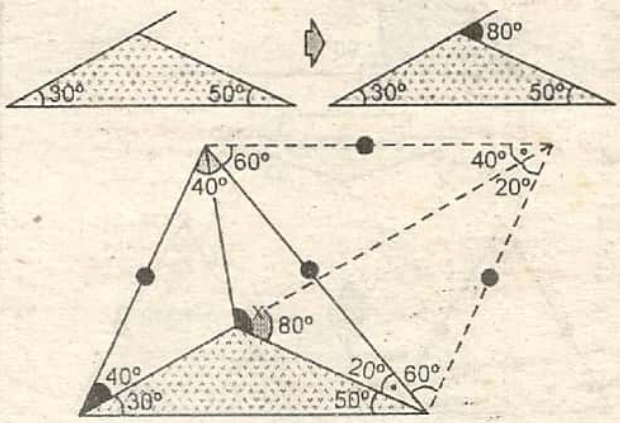


Paso Nº 2: Ahora se observa la siguiente propiedad donde se cumple:

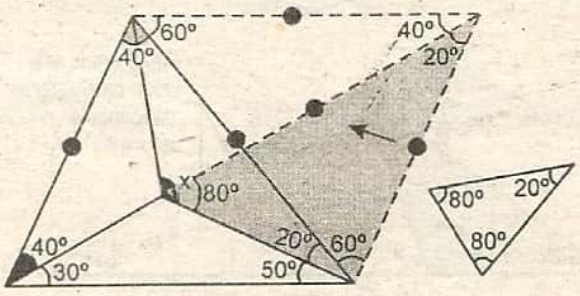




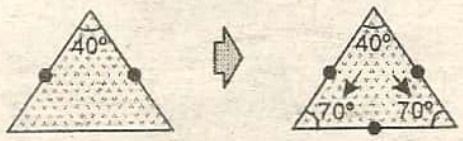
Paso Nº 3: Luego se observa en la figura un triángulo que cumple la siguiente propiedad.

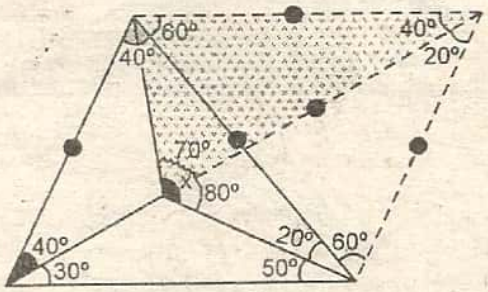


Paso Nº 4: Luego se obtiene un triángulo isósceles.



Paso Nº 5: También se obtiene:



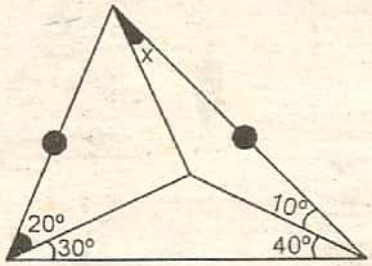


Luego: $\therefore\ x = 70° + 80°$

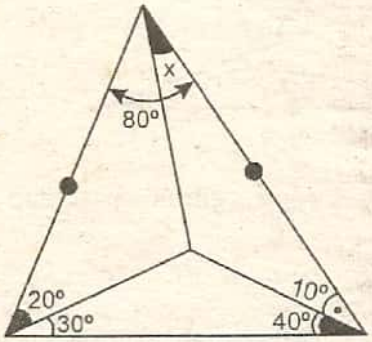
$x = 150°$

EJEMPLO Nº 2

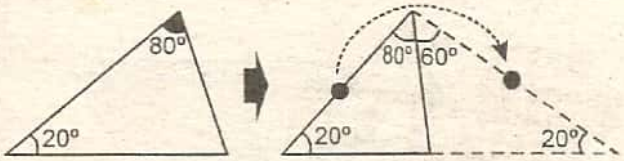
Calcular "x"



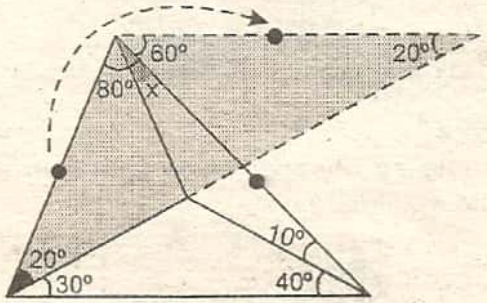
Solución: Se observa en la figura un triángulo isósceles.



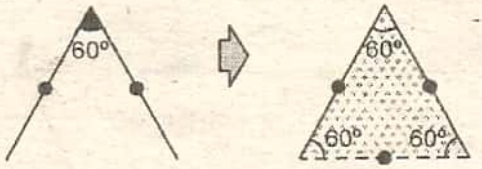
Paso Nº 1: En la figura se tiene:

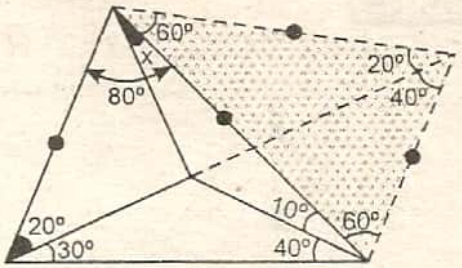


Empleando el sexto criterio de construcción para obtener el triángulo anterior.

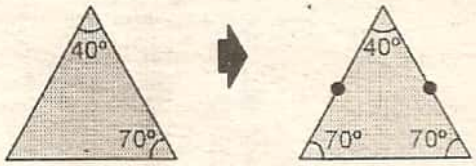


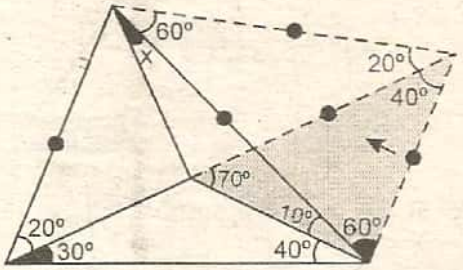
Paso Nº 2: Luego se observa en la figura que se obtiene la siguiente propiedad donde se cumple:



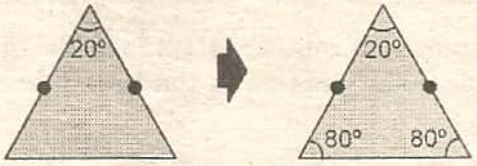


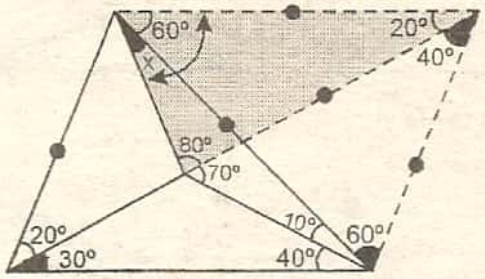
Paso Nº 3: También se obtiene un nuevo triángulo isósceles.





Paso Nº 4: También se observa en la figura:



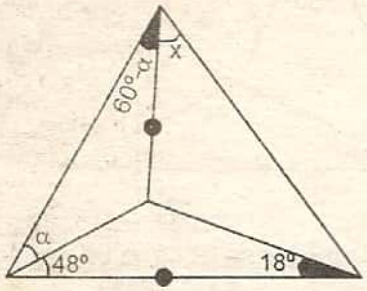


$\Rightarrow x + 60° = 80°$

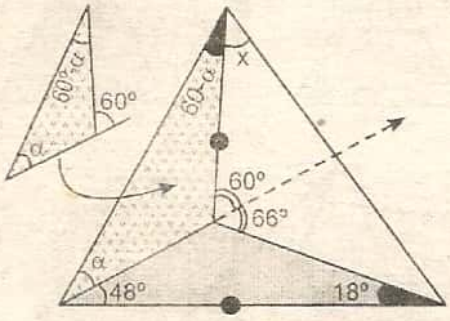
$x = 20°$

EJEMPLO Nº 3

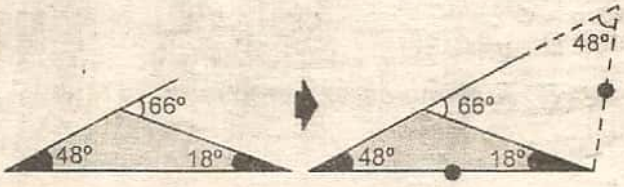
Calcular "x"



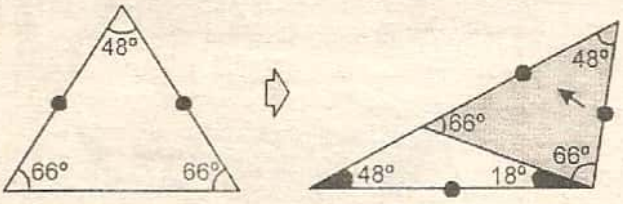
Solución: Se observa en la figura.



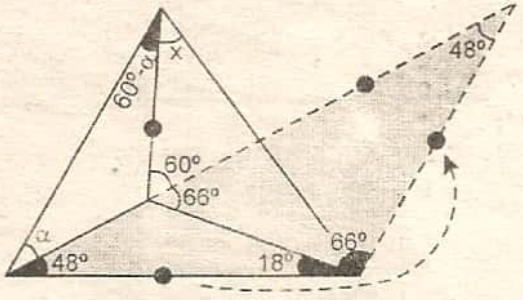
Paso Nº 1: En la figura sombreada se tiene:



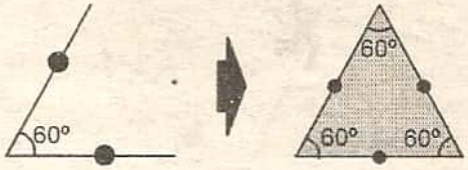
Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera:

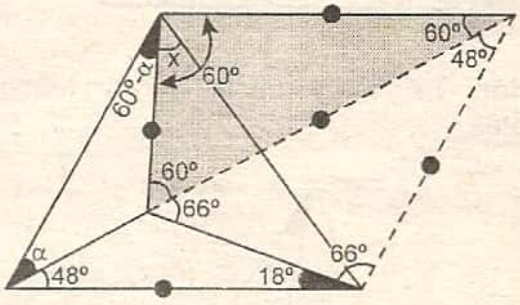


Luego en la figura:

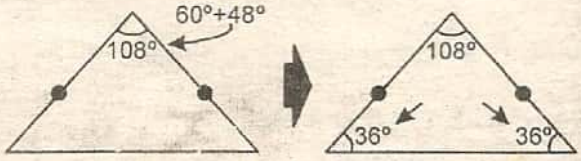


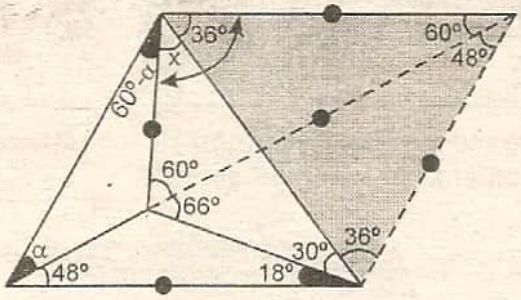
Paso Nº 2: Luego se observa un triángulo equilátero.





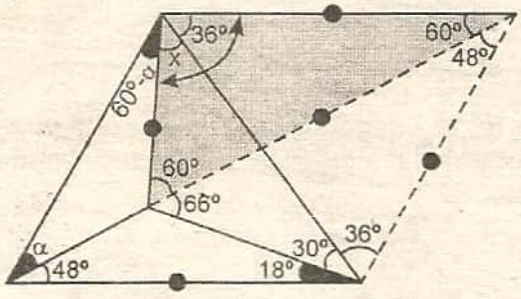
Paso Nº 3: Luego vemos un nuevo triángulo isósceles.





Paso Nº 4:

Finalmente se observa en la figura un nuevo triángulo equilátero.



$\Rightarrow \quad x + 36° = 60°$

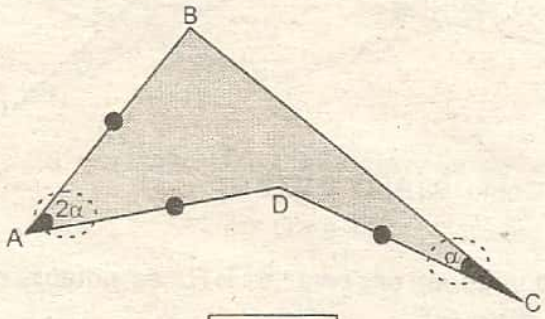
$x = 24°$

7mo Criterio

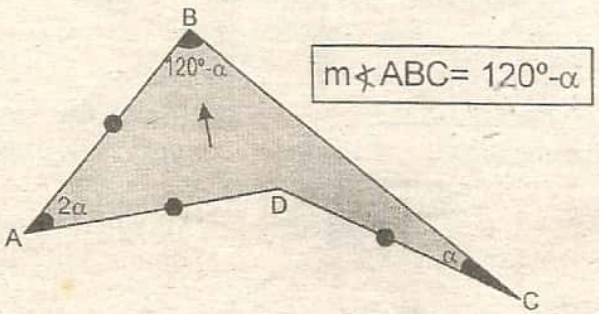
"BUSCANDO CUADRILÁTEROS CÓNCAVOS"

Con ayuda del tema de congruencia, se buscará obtener en las figuras dadas, cuadriláteros cóncavos tanto interiormente como exteriormente, teniendo en cuenta obtener tres lados iguales con sus ángulos internos que estén en la relación de dos a uno; de la siguiente manera:

CASO I: Si tenemos:

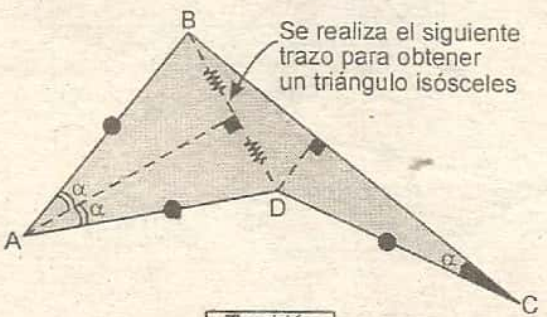


Se cumple

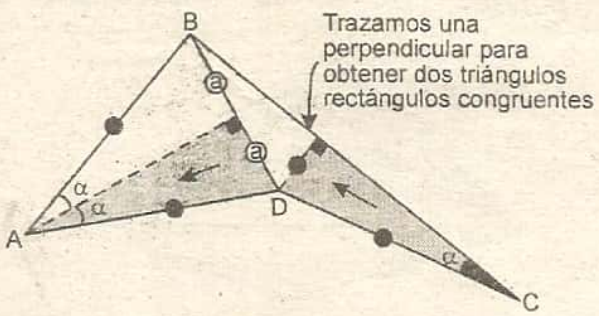


$m\measuredangle ABC = 120° - \alpha$

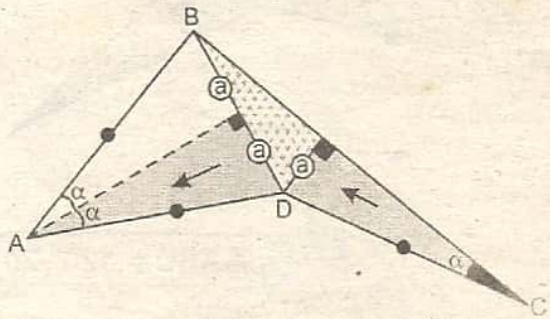
Demostración



También se obtiene

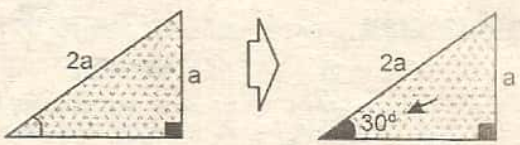


Luego se tiene

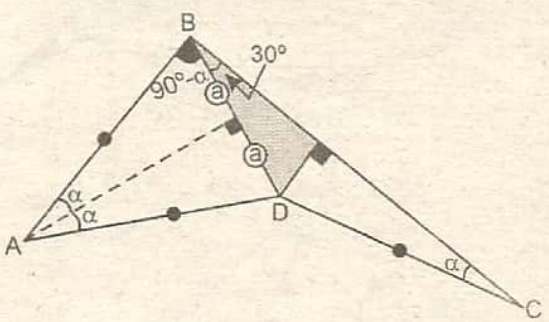


Se observa

Un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°.



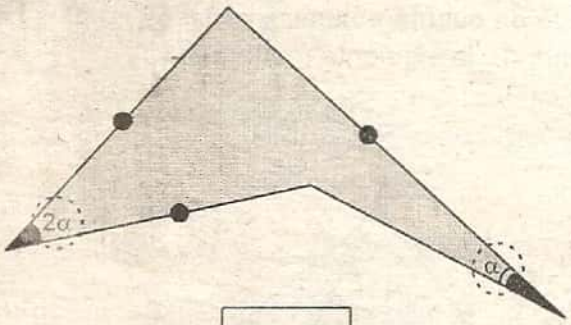
Ahora



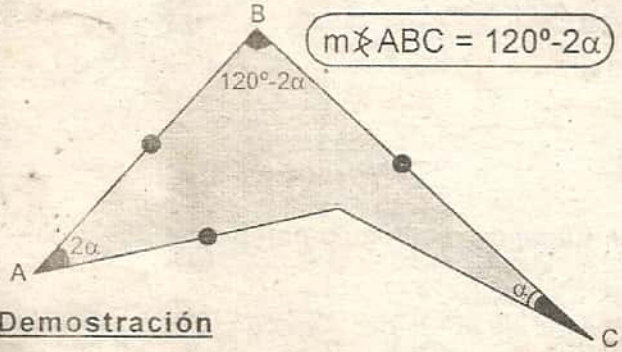
$\Rightarrow m\measuredangle ABC = 120° - \alpha$

CASO II

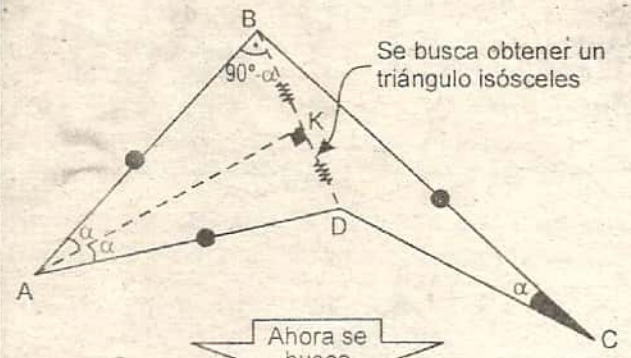
Si tenemos una figura con las siguientes caracteristicas.



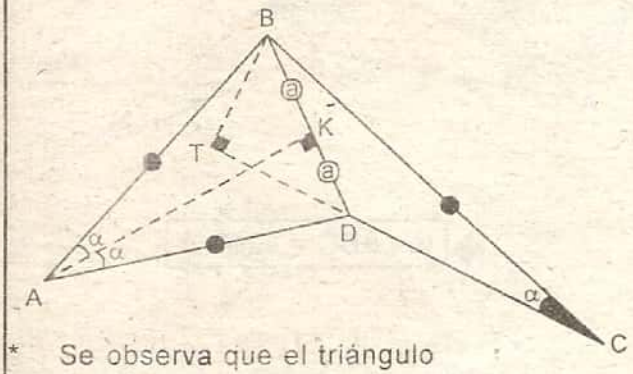
Se cumple



Demostración

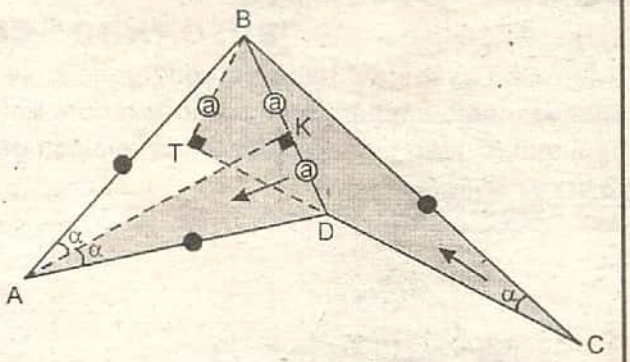


Ahora se busca



* Se observa que el triángulo ABD es isosceles.

* Se traza $\overline{BT} \perp \overline{TC}$ para obtener Dos triángulos rectángulos congruentes $\triangle AKD \cong \triangle BTC$

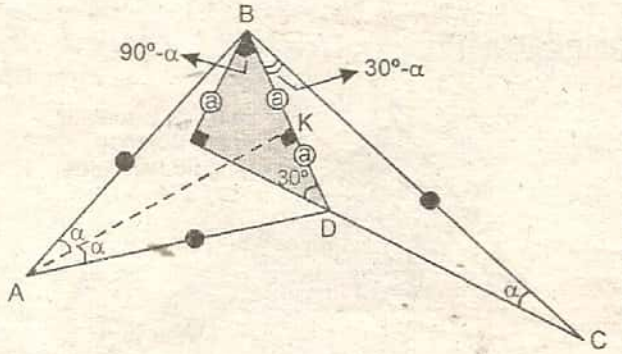


Como $\triangle AKD \cong \triangle BTC$

$\Rightarrow$ BT = KD = a

Luego se observa: $\triangle BTD$ es notable de 30° y 60°

Ahora tenemos



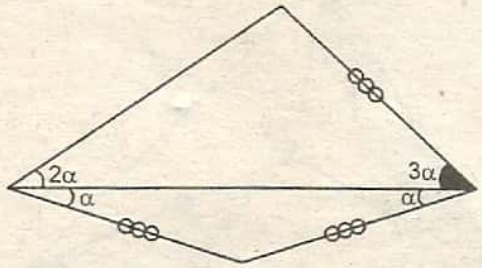
En la figura se observa

$m\sphericalangle ABC = 90° - \alpha + 30° - \alpha$

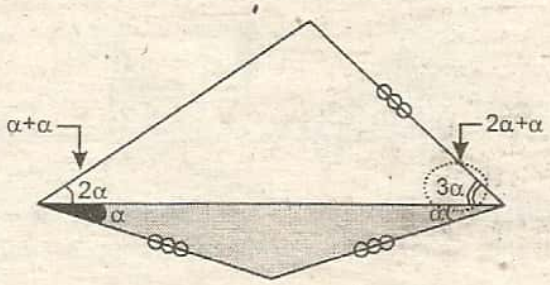
$m\sphericalangle ABC = 120° - 2\alpha$

EJEMPLO Nº 1

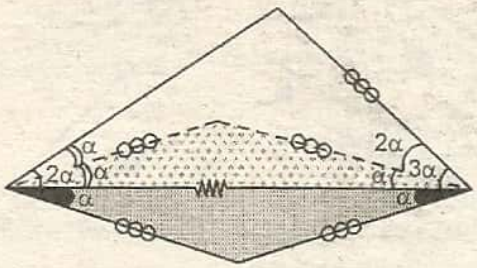
Hallar α

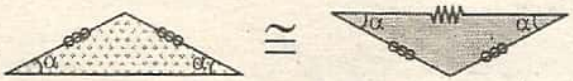


Solución: Observamos la figura y se obtiene:

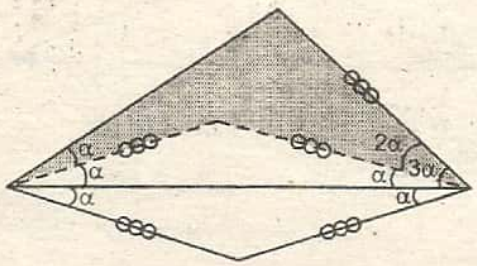


Paso Nº 1: Construimos un triángulo congruente interiormente de la siguiente manera.

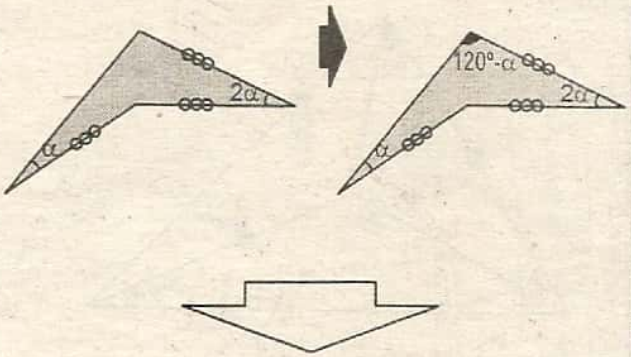


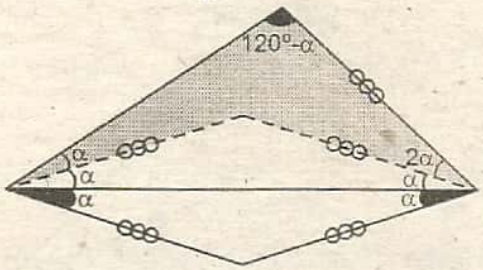


Paso Nº 2: Ahora observamos un cuadrilátero concavo y con ello aplicamos el septimo criterio de construcción

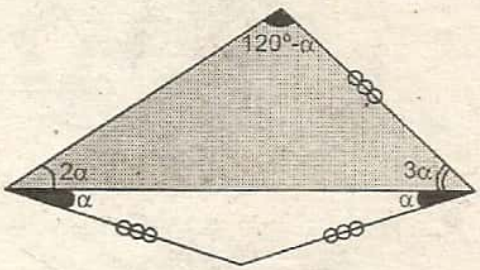


Aqui podemos observar que se cumple:





Paso Nº 3: Finalmente observamos en la figura sombreada se cumple:



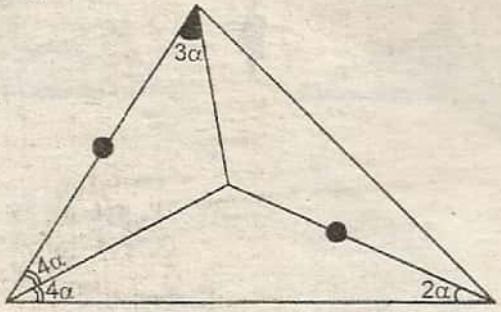
$$120° - \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$$

$$4\alpha = 60°$$

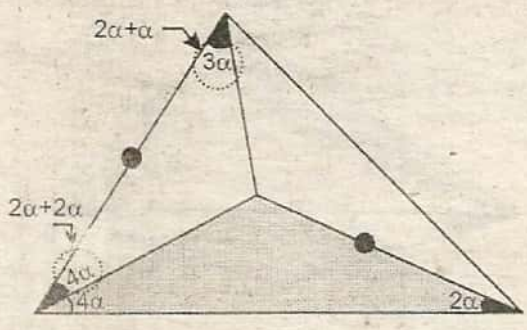
$$\alpha = 15°$$

EJEMPLO Nº 2

Hallar "α".

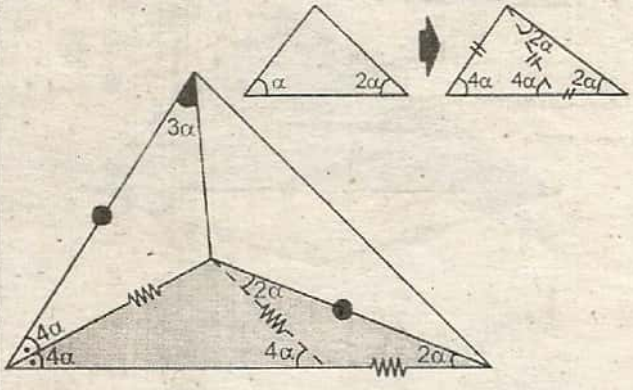


Solución:

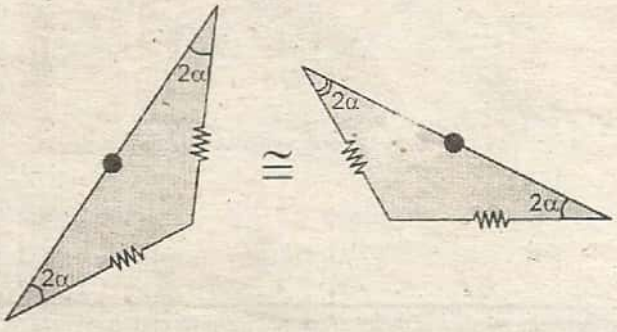


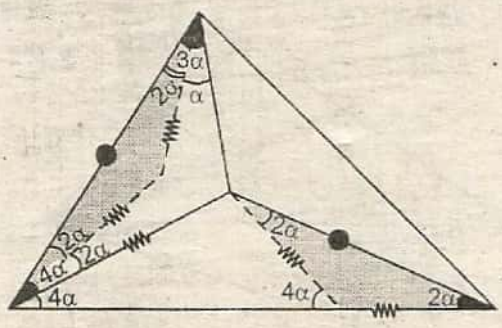
Se observa un triángulo donde se puede usar el primer criterio de construcción

Paso Nº 1:

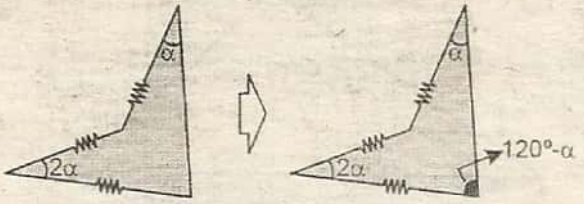


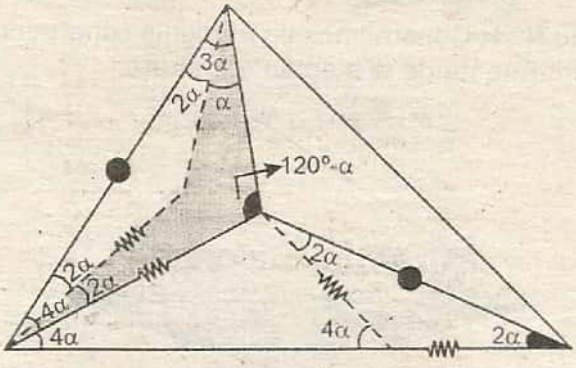
Paso Nº 2: Construimos un triángulo congruente interiormente en la figura, de la siguiente manera y se obtiene:



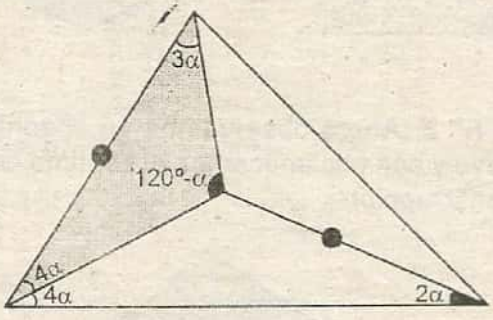


Paso Nº 3: En la figura observamos un cuadrilátero concavo donde se cumple:





Paso Nº 4: Luego en la figura sombreada, se tiene:



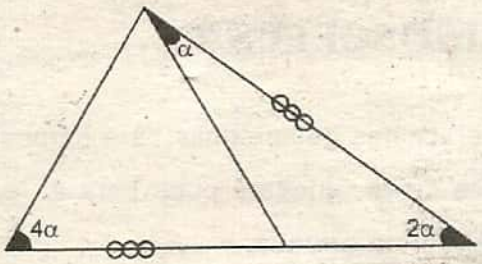
$$4\alpha + 120° - \alpha + 3\alpha = 180°$$

$$6\alpha = 60°$$

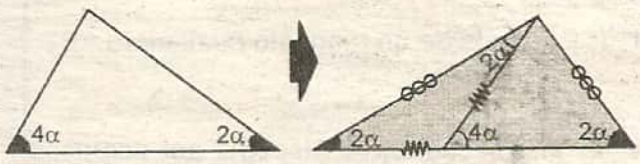
$$\alpha = 10°$$

EJEMPLO Nº 3

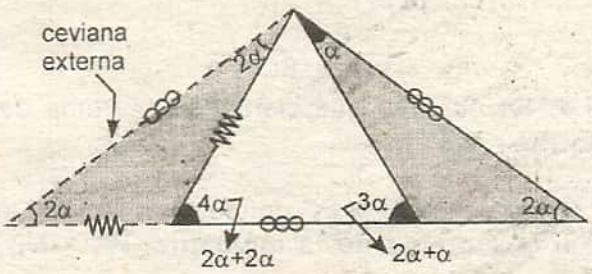
Hallar " α "



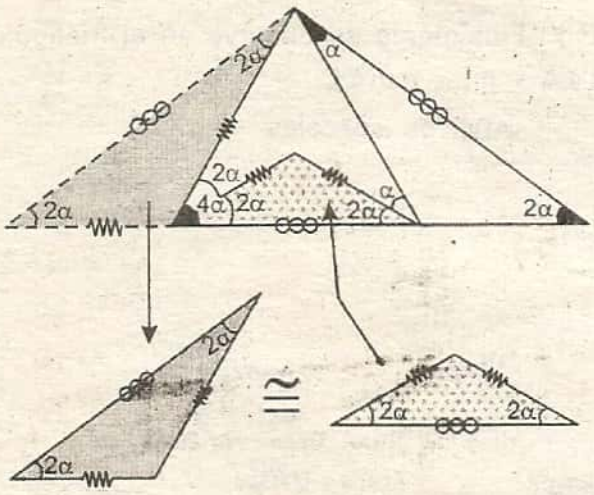
Solución: Observamos en la figura



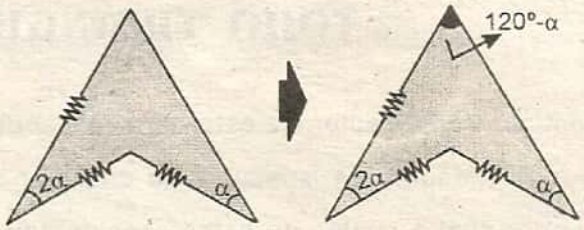
Paso Nº 1: Primero aplicamos el primer criterio de construcción, trazando una ceviana externa.

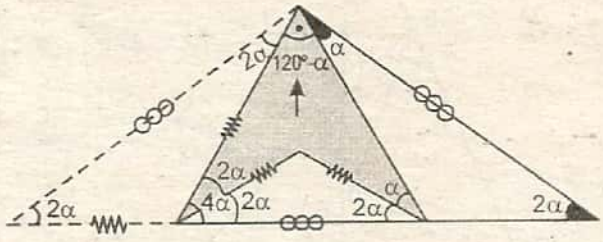


Paso Nº 2: Ahora construimos un triángulo congruente interiormente para obtener dos triángulos congruentes de la siguiente forma. caso (A.L.A.)

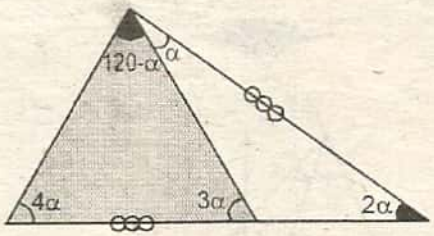


Paso Nº 3: Luego en la nueva figura observamos un cuádrilatero concavo donde se cumple:





Paso Nº 4: Finalmente se obseva en el figura sombreada que se cumple:



$$\therefore \quad 4\alpha + 120° - \alpha + 3\alpha = 180°$$

$$6\alpha = 60°$$

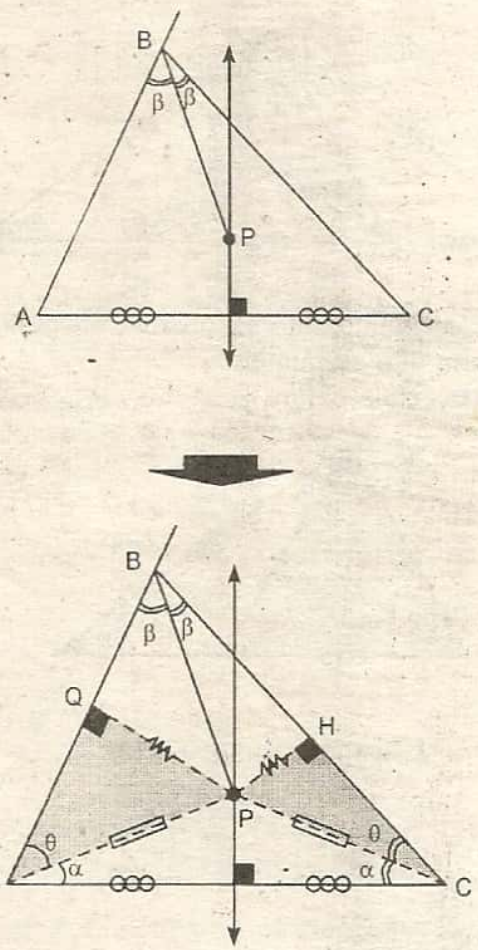
$$\alpha = 10°$$

La ciencia, por el camino de la exactitud, sólo tiene dos ojos: La matemática y la lógica. (De Morgan)

Curiosidad Matemática

¿ TODO TRIÁNGULO ES ISÓSCELES ?

A continuación el autor de esta obra realizará unas consideraciones geometricas para demostrar que todo triángulo es isósceles, lo cual por supuesto no es cierto, quedará pues para el lector averiguar cual o cuales de estas consideraciones se hizo en forma erronea.



Demostración:

Paso Nº 1: Partimos de un triángulo cualquiera ABC.

Paso Nº 2: Intersectamos la bisectriz del ángulo B con la mediatriz de $\overline{AC}$ en un punto interior P.

Paso Nº 3: Trazamos $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PH} \perp \overline{BC}$

Paso Nº 4: Se observa que cumple el teorema de bisectriz: PQ = PH

Paso Nº 5: Trazamos AP y PC donde se observa que se cumple el teorema de la mediatriz: PA = PC, además: $m\measuredangle PAC = m\measuredangle PCA = \alpha$

Paso Nº 6: Se observa dos triángulos rectángulos congruentes $\triangle AQP \cong \triangle PHC$

$\Rightarrow . m\measuredangle QAP = m\measuredangle PCH = \theta$

Paso Nº 7: Finalmente se observa en el triángulo ABC: $m\measuredangle A = \theta + \alpha = m\measuredangle C$

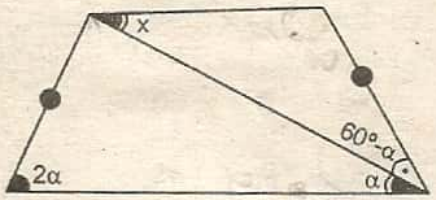
$\therefore \Delta ABC$ es isósceles

Extraido del Texto "Geometria Plana" de Ernesto Quispe

Problemas Resueltos

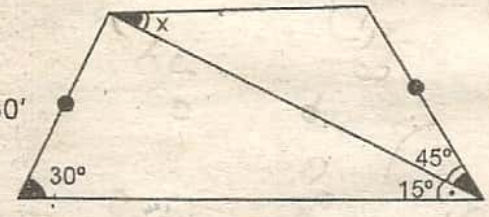
01. Calcular "x"

A) 18°
B) 20°
C) 30°
D) 37°
E) 45°



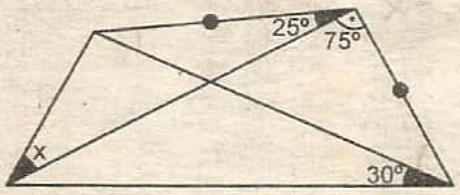
02. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 22°30'
D) 30°
E) 40°



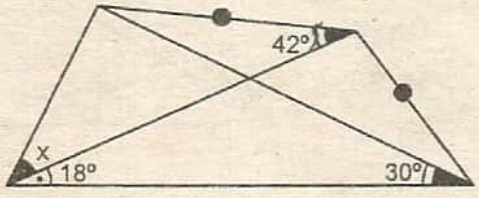
03. Calcular "x"

A) 18°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 45°



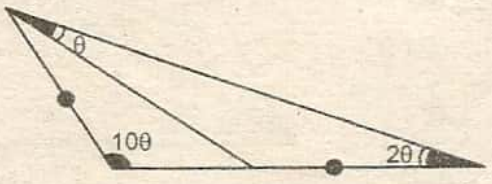
04. Calcular "x"

A) 15°
B) 22°
C) 28°
D) 30°
E) 36°



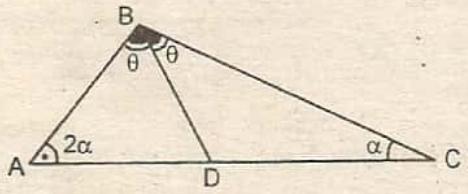
05. Calcular "θ"

A) 5°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 14°



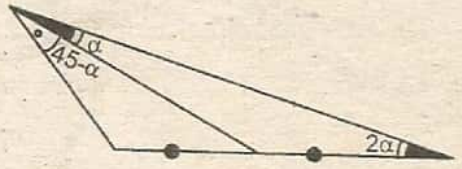
06. Calcular el máximo valor de "CD" si AB =8

A) 4
B) 7
C) 16
D) 15
E) 8



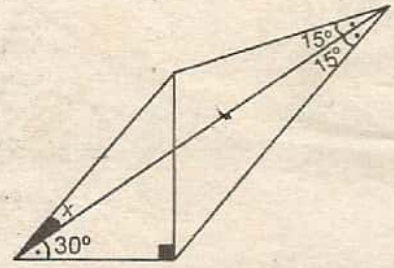
07. Calcular "α"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



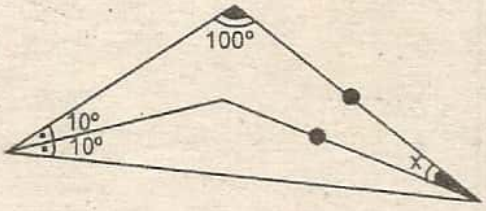
08. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 22°30'



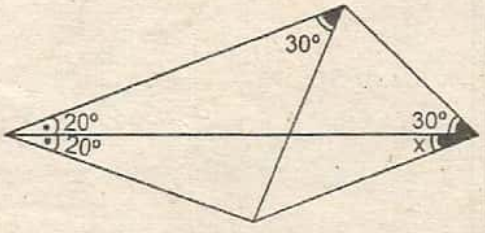
09. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 60°



10. Calcular "x"

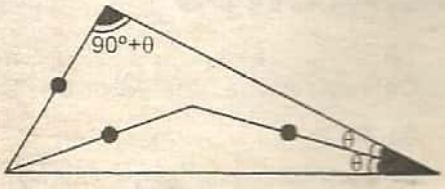
A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



La matemática, de un modo original, es fundamentalmente la ciencia de las cosas que son evidentes por si mismas. (Felix Klein)

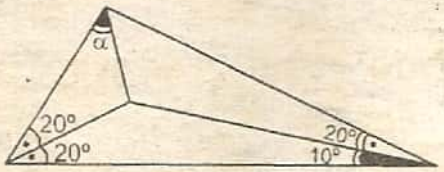
11. Calcular "θ"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



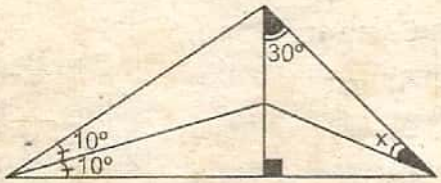
12. Calcular "α"

A) 20°
B) 30°
C) 32°
D) 37°
E) 60°



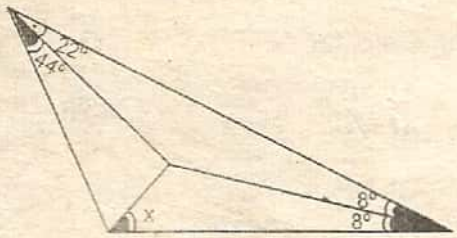
13. Calcular "x"

A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25°



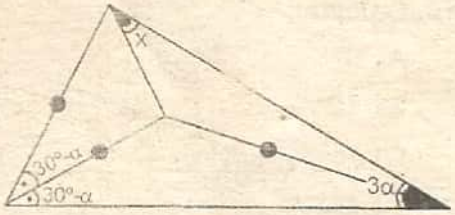
14. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 60°



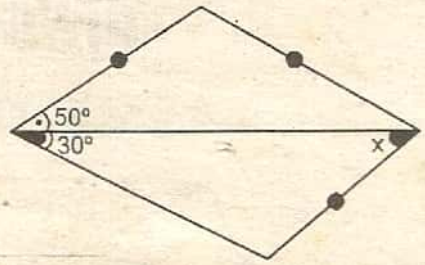
15. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 45°
D) 30°
E) 60°



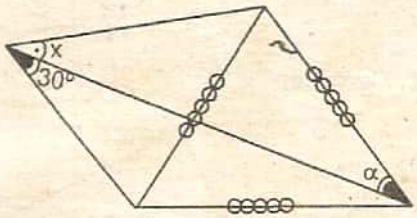
16. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 30°



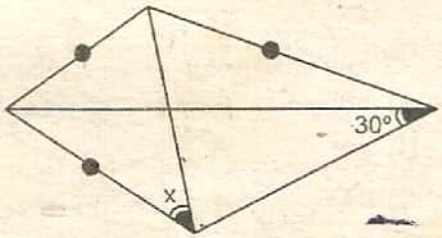
17. Calcular "x"

A) α/2
B) α
C) 30−α
D) 2α
E) 60−α



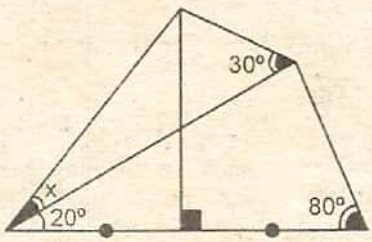
18. Calcular "x"

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



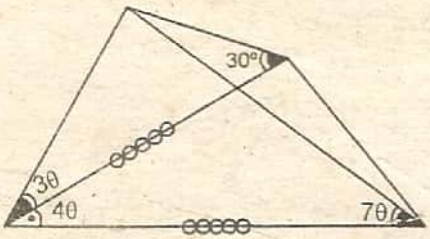
19. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 24°



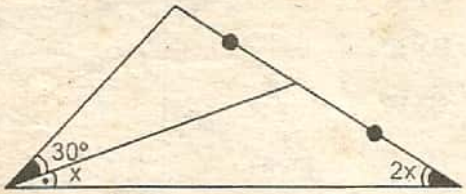
20. Calcular "θ"

A) 6°
B) 8°
C) 9°
D) 10°
E) 12°



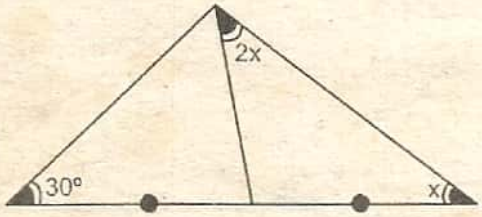
21. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 25°



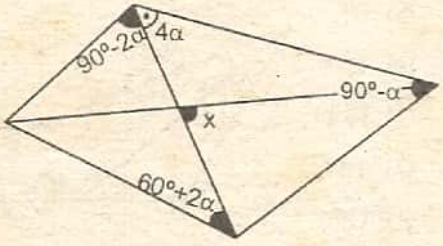
22. Calcular "x"

A) 5°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



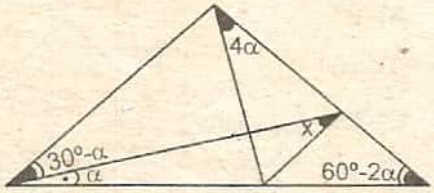
23. Calcular "x"

A) 90°
B) 90°– α
C) 90°+α
D) 60°+3α
E) 75°+2α



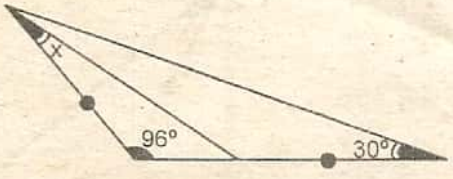
24. Calcular "x"

A) α
B) 30°+α
C) 3α
D) 30°
E) 30 – α



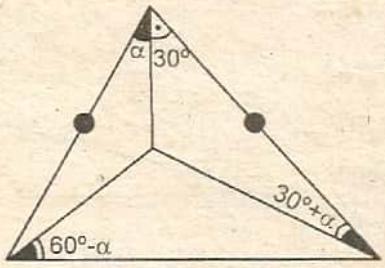
25. Calcular "x"

A) 18°
B) 24°
C) 30°
D) 37°
E) 45°



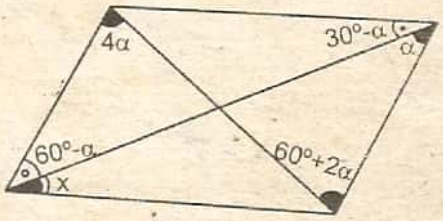
26. Calcular "α"

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



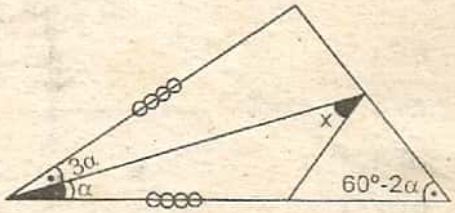
27. Calcular "x"

A) 18°
B) 24°
C) 36°
D) 30°
E) 45°



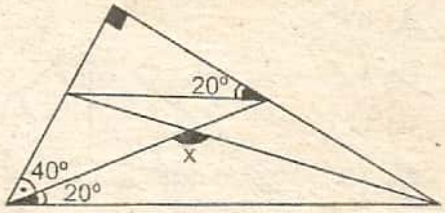
28. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



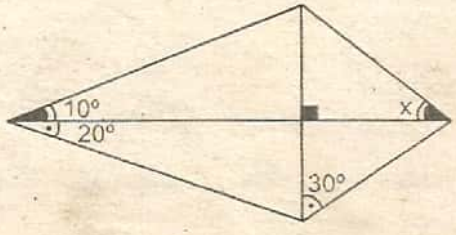
29. Calcular "x"

A) 120°
B) 140°
C) 130°
D) 135°
E) 150°



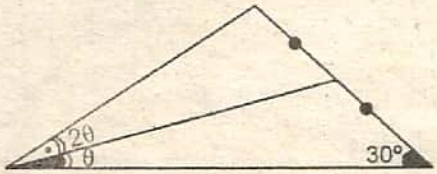
30. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°



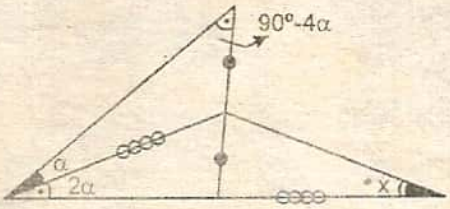
31. Calcular " θ "

A) 15°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 26°



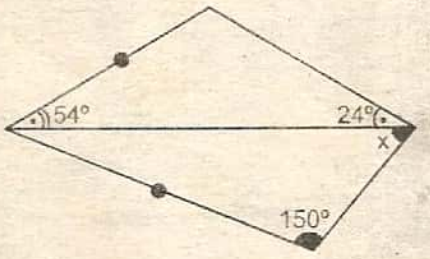
32. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 54°



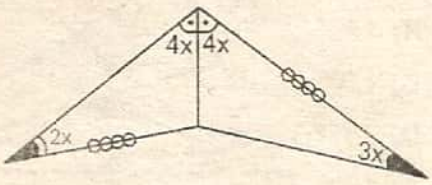
33. Calcular "x"

A) 9°
B) 10°
C) 11°
D) 12°
E) 15°



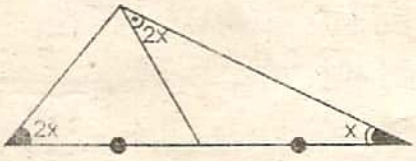
34. Calcular "x"

A) 8°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



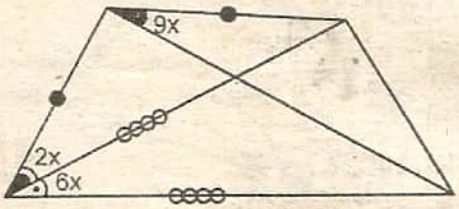
35. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



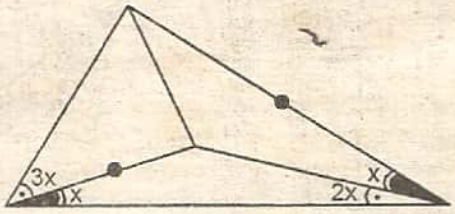
36. Calcular "x"

A) 3°
B) 6°
C) 9°
D) 10°
E) 12°



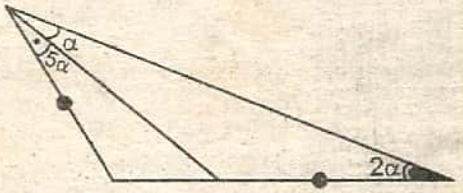
37. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



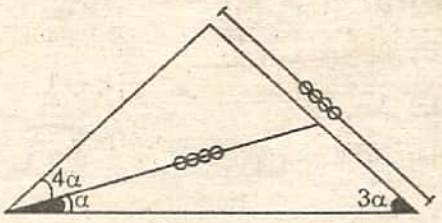
38. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



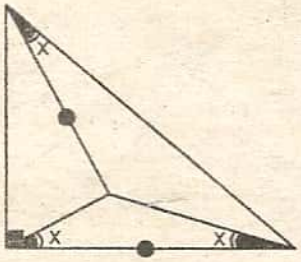
39. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



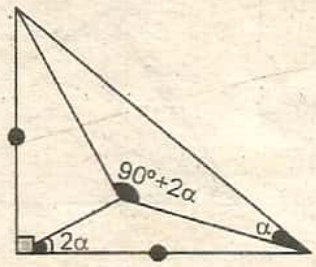
40. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 22°30'



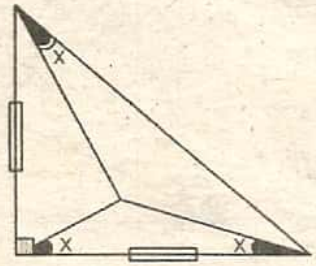
41. Calcular "α"

A) 10°
B) 22°30'
C) 15°
D) 18°
E) 20°



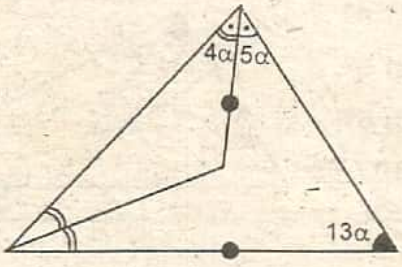
42. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 24°



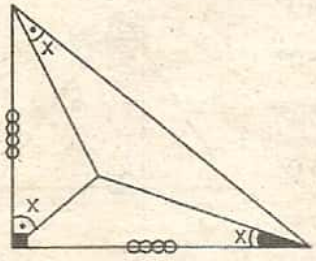
43. Calcular "α"

A) 4°
B) 4°30'
C) 5°
D) 6°30'
E) 9°



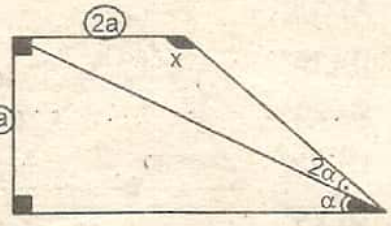
44. Calcular "x"

A) 39°/2
B) 53°/2
C) 30°
D) 37°
E) 53°



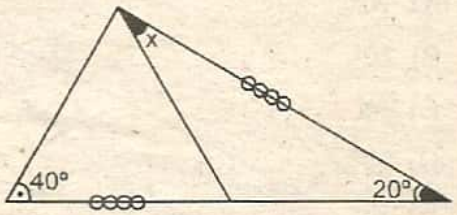
45. Calcular "x"

A) 108°
B) 112°
C) 112°30'
D) 120°
E) 135°



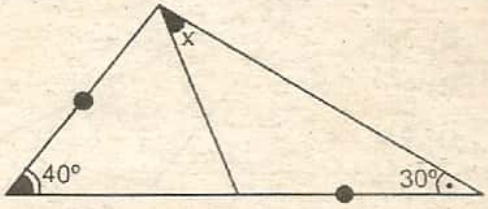
46. Calcular "x"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



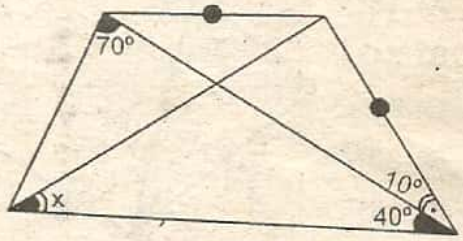
47. Calcular "x"

A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 54°



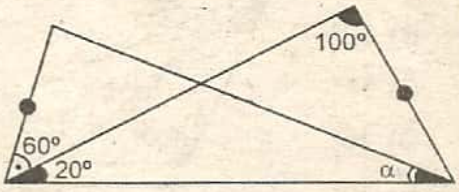
48. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 40°
D) 30°
E) 36°



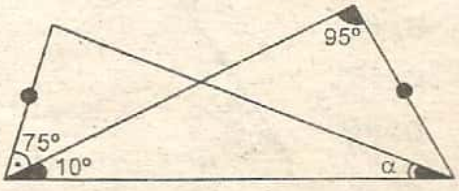
49. Calcular "α"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



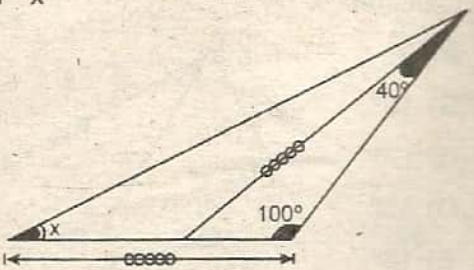
50. Calcular "α"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 40°



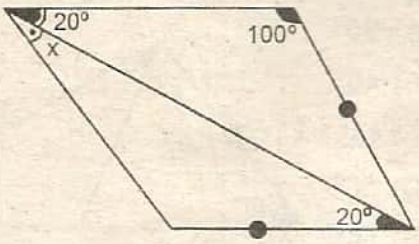
51. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



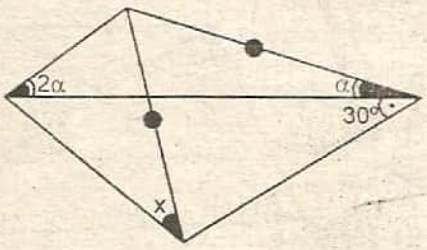
52. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



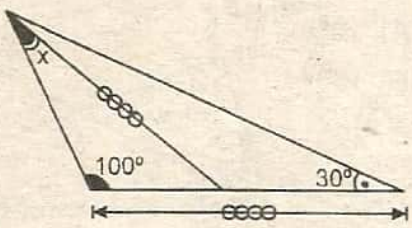
53. Calcular "x"

A) 18°
B) 24°
C) 26°
D) 30°
E) 36°



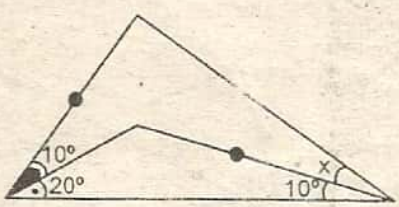
54. Calcular "x"

A) 30°
B) 32°
C) 37°
D) 15°
E) 40°



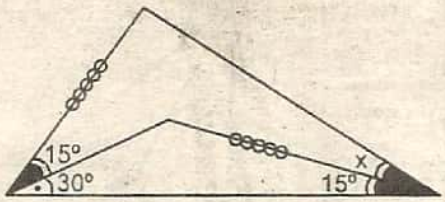
55. Calcular "x"

A) 5°
B) 8°
C) 10°
D) 15°
E) 30°



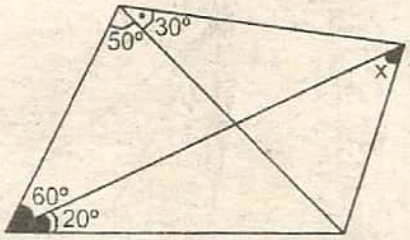
56. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 45°
E) 60°



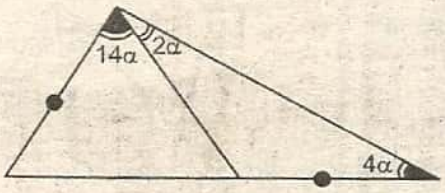
57. Calcular "x"

A) 15°
B) 20°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



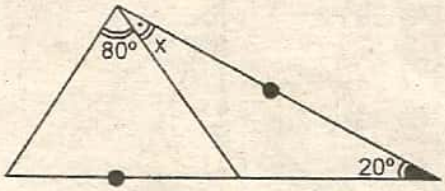
58. Calcular "α"

A) 4°
B) 5°
C) 6°
D) 7,5°
E) 8°



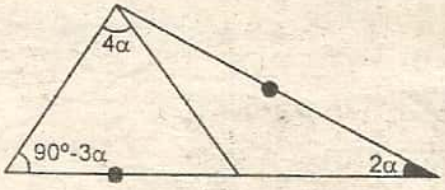
59. Calcular "x"

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 75°



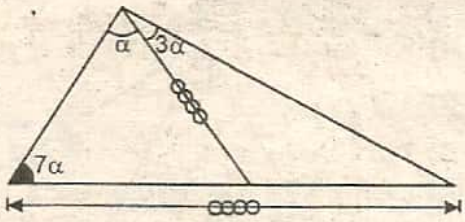
60. Calcular "α"

A) 18°
B) 16°
C) 20°
D) 22°
E) 24°



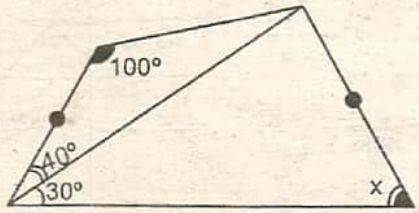
61. Calcular "α"

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



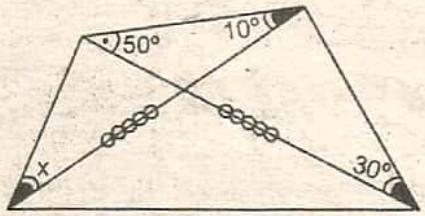
62. Calcular "x"

A) 30°
B) 45°
C) 50°
D) 55°
E) 60°



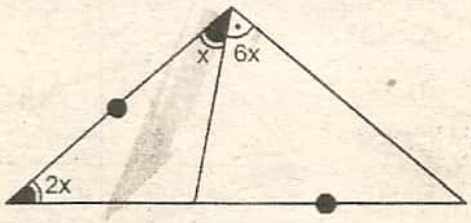
63. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



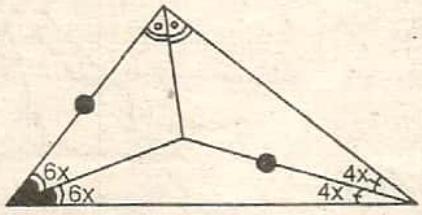
64. Calcular "x"

A) 15°
B) 8°
C) 10°
D) 12°
E) 6°



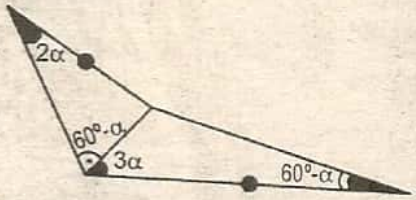
65. Calcular "x"

A) 4°
B) 5°
C) 4,8°
D) 5,5°
E) 6°



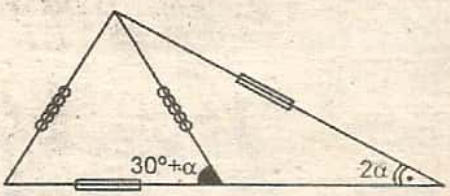
66. Calcular "α"

A) 7°30'
B) 10°
C) 15°
D) 5°
E) 30°



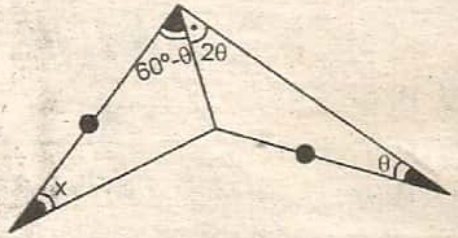
67. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



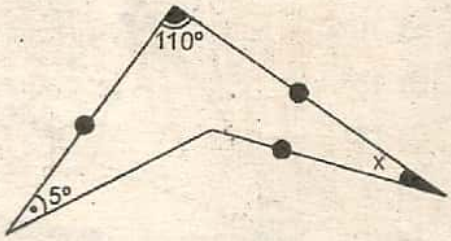
68. Calcular "x"

A) 30°–θ
B) 30°
C) 30°+θ
D) 20°
E) 40°



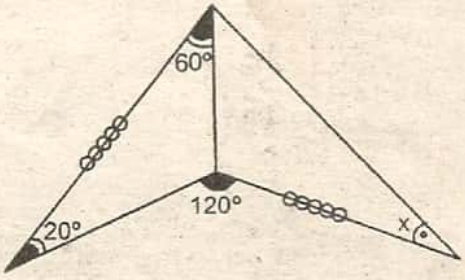
69. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



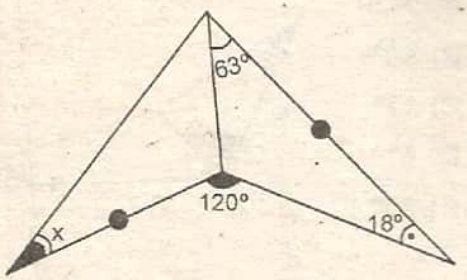
70. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 5°
E) 15°



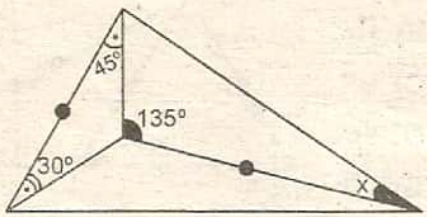
71. Calcular "x"

A) 6°
B) 7°
C) 8°
D) 9°
E) 10°



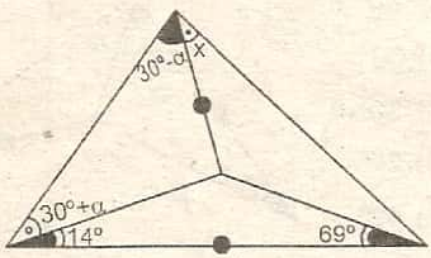
72. Calcular "x"

A) 15°
B) 12°30'
C) 22°30'
D) 18°30'
E) 30°



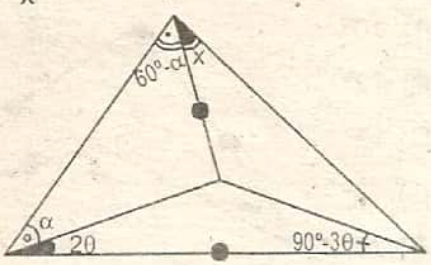
73. Calcular "x"

A) 3°
B) 6°
C) 7°
D) 9°
E) 13



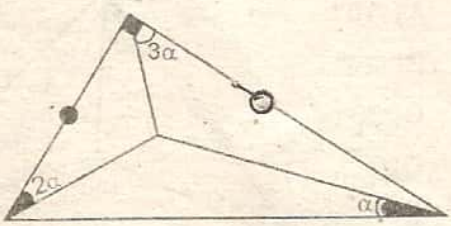
74. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) α
E) θ



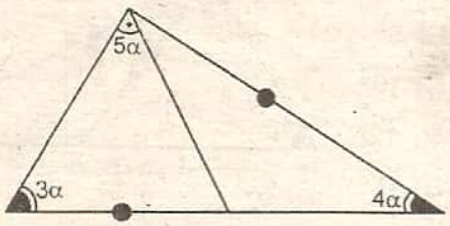
75. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



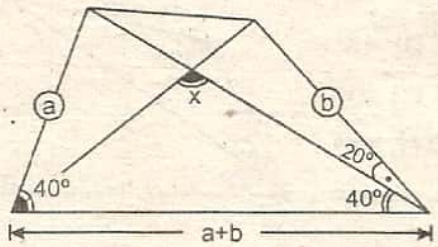
76. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



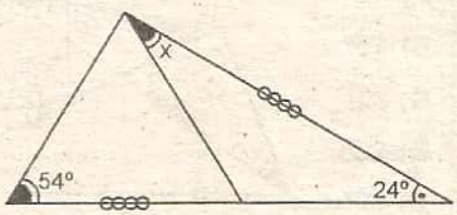
77. Calcular "α"

A) 100°
B) 110°
C) 120°
D) 130°
E) 135°



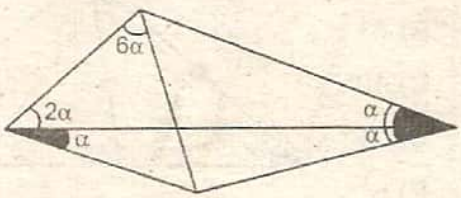
78. Calcular "x"

A) 5°
B) 6°
C) 12°
D) 16°
E) 18°



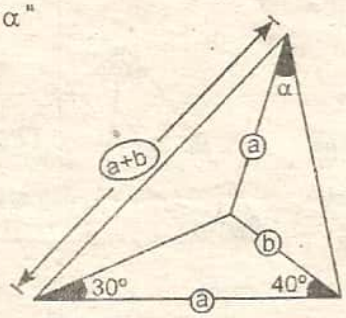
79. Calcular "α"

A) 10°
B) 12
C) 15°
D) 16°
E) 18°



80. Calcular "α"

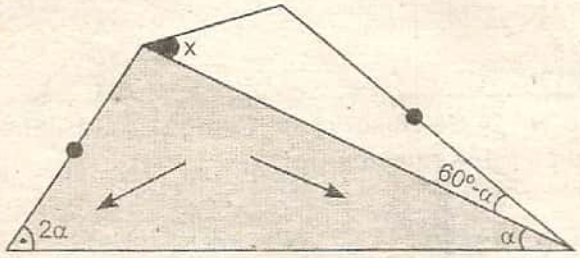
A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 24°



Problemas Resueltos

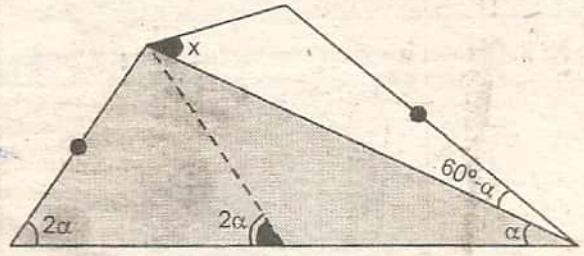
Solución Nº 1

Observamos en el gráfico que hay un triángulo que tiene 2 ángulos interiores en la relación de 1 a 2.



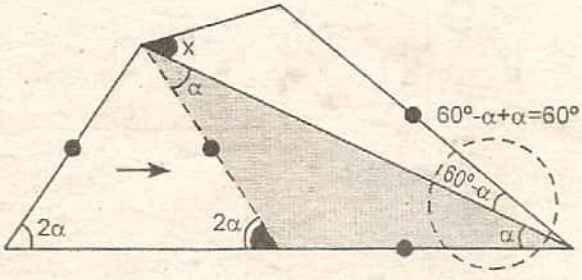
Paso Nº 1

Entonces aplicamos el primer criterio de construcción: trazamos la ceviana interna.

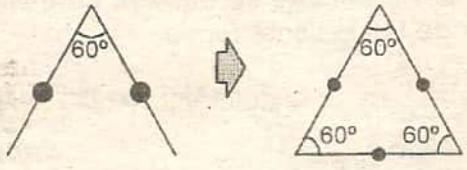


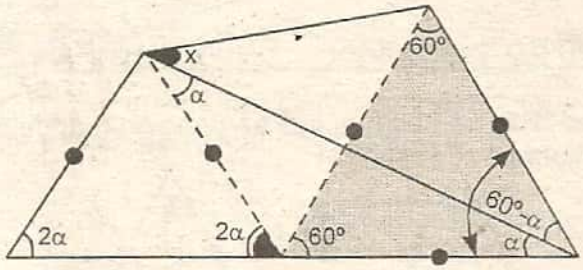
Paso Nº 2

Ahora completamos los ángulos internos y se observa que se tiene triángulos isosceles.



Paso Nº 3: Se observa un ángulo de 60° y lados iguales, entonces buscamos el triángulo equilátero de la siguiente manera:

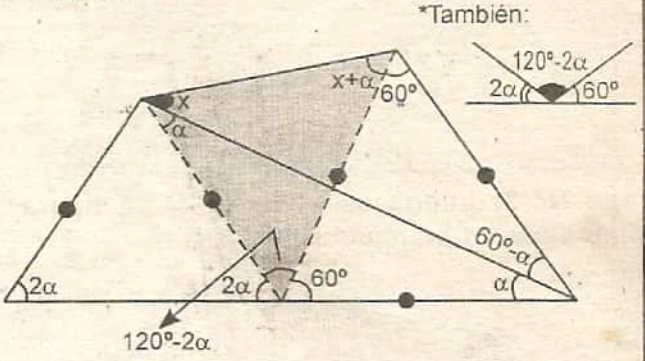




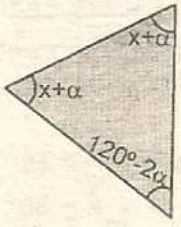
Paso Nº 4

Se observa en la figura sombreada un triángulo isósceles.

*También:



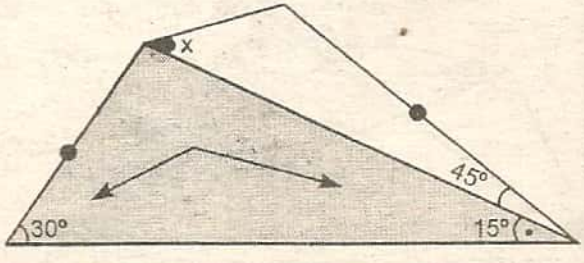
Paso Nº 5: Finalmente en la figura sombreada se cumple:



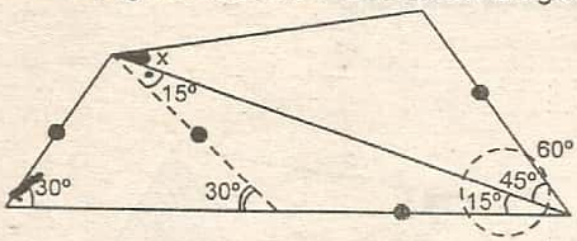
$$(x+\alpha)+(x+\alpha)+120°-2\alpha = 180°$$
$$2x+2\alpha+120°-2\alpha = 180°$$
$$2x = 60°$$
$$x = 30°$$

Solución Nº 2

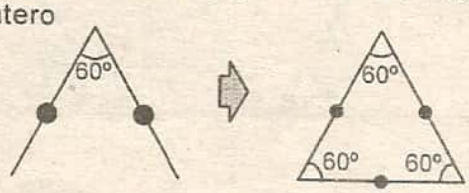
Se observa 2 ángulos interiores en la relación de 1 y 2

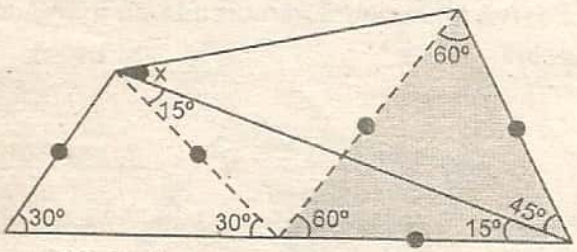


Paso N°1: Aplicamos el primer Criterio para formar triángulos isósceles internos en la figura.

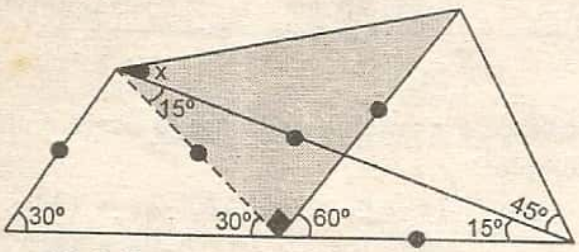


Paso N°2: Se observa que se tiene un triángulo equilátero

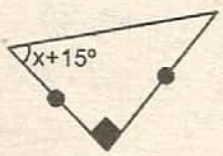




Paso N° 3: Luego se observa en la figura sombreada un triángulo isósceles.



Paso N° 4: Se observa que la figura sombreada es un triángulo rectángulo isósceles de 45°.

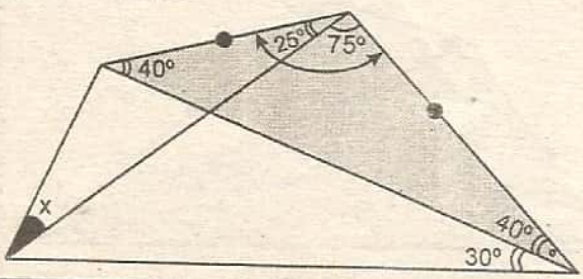


$\therefore$ **x + 15° = 45°**

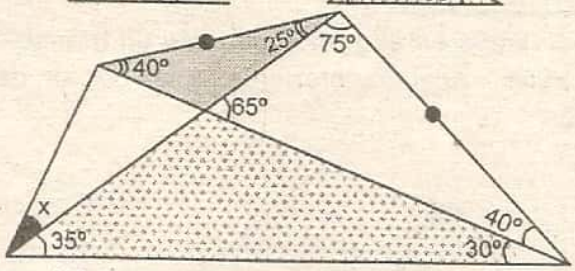
$\Rightarrow$ **x = 30°**

Solución N° 3

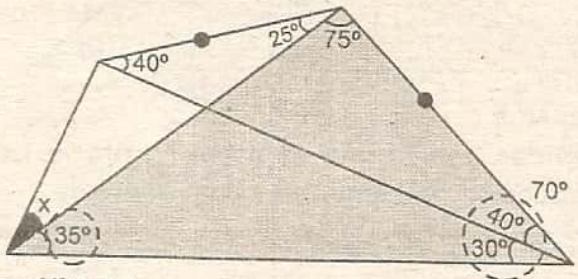
En el triángulo sombreado se completa los ángulos intérnos.



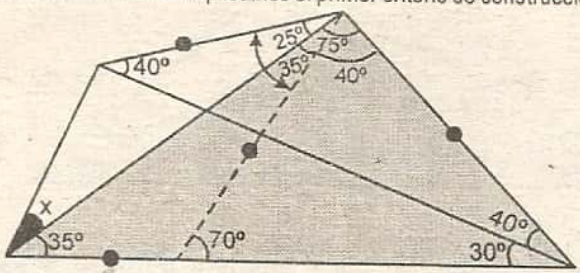
Paso N° 1: Observamos las siguientes figuras en donde se cumplen:



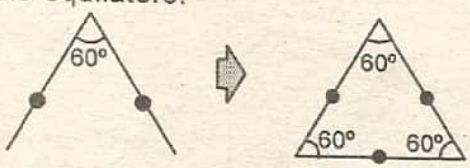
Paso N° 2: Se observa un triángulo que tiene ángulos en la relación de 1 a 2

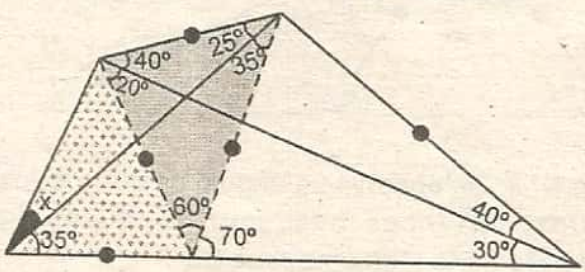


Paso N° 3: Entonces aplicamos el primer criterio de construcción.

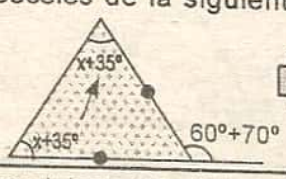


Paso N° 4: Ahora en la figura se observa un triángulo equilátero.





Paso N° 5: Finalmente se observa un triángulo isósceles de la siguiente forma:



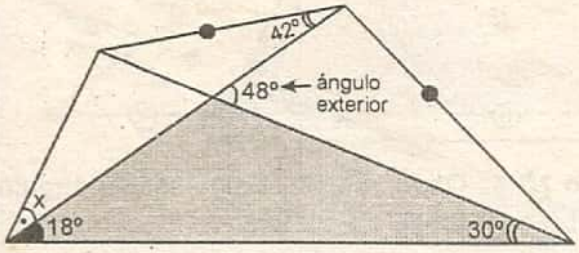
$\Rightarrow$ $(x+35°)+(x+35°) = 130°$

$2x = 60°$

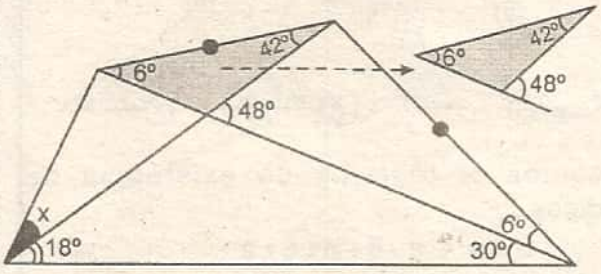
$x = 30°$

Solución Nº4

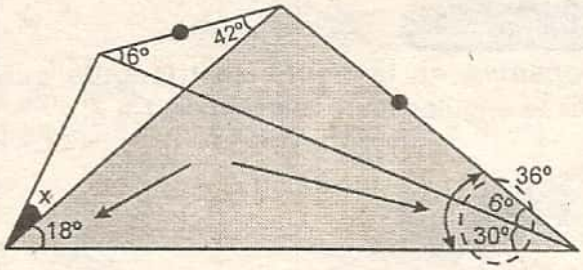
Paso Nº 1: Se observa el triángulo sombreado:



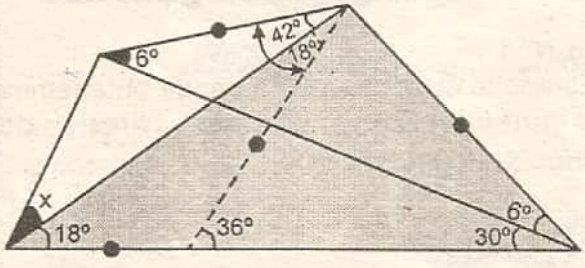
Tambien se observa que se cumple:



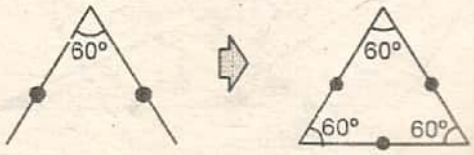
Paso Nº 2: Se observa un triángulo con ángulos en la relación 1 a 2.

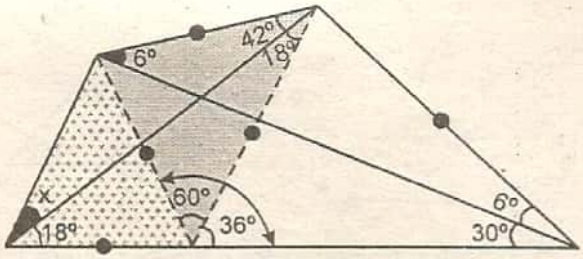


Paso Nº3: Aplicamos el primer criterio de construcción.

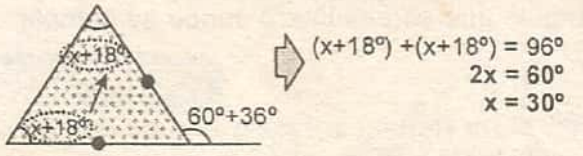


Paso Nº 4: Se observa un triángulo equilátero.



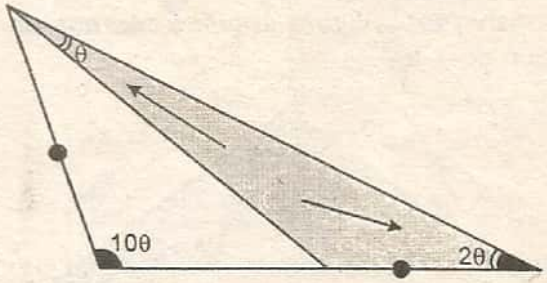


Paso Nº 5: Finalmente, se observa el triángulo donde se realiza la siguiente operación:

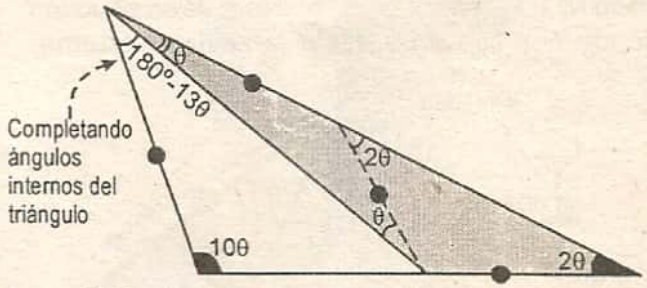


Solución Nº5

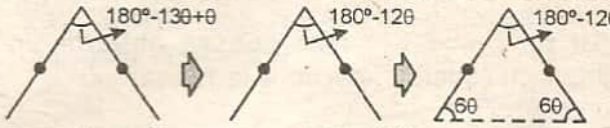
Se observa ángulos internos en la relación de 1 a 2.



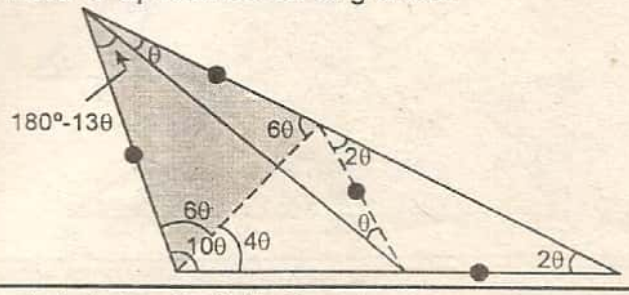
Paso Nº1: Aplicamos el primer criterio de construcción



Paso Nº2: Se observa un triángulo isósceles.



Ahora lo aplicamos en el gráfico.



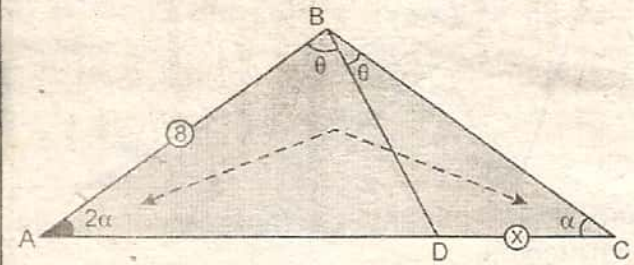
Paso N° 3:

Paso N°4: En la figura observamos el siguiente triángulo que es equilátero donde se cumple:

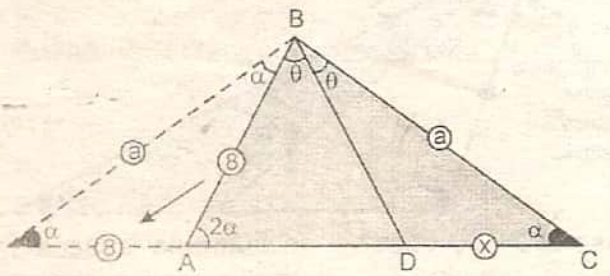
$\therefore\ 6\theta = 60°$
$\theta = 10°$

Solución N°6

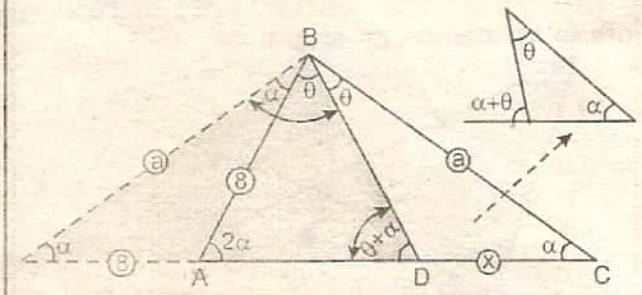
Se observa en la figura ángulos internos en la relación de 1 a 2.



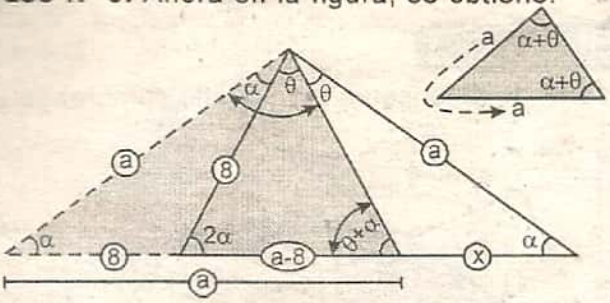
Paso N° 1: Aplicamos el primer criterio de construcción; donde nos conviene trazar la ceviana externa.



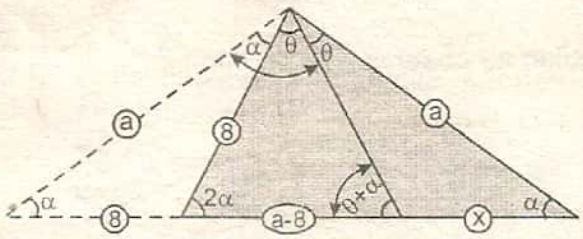
Paso N° 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles interno a la figura:



Paso N° 3: Ahora en la figura, se obtiene:



Paso N° 4: Observamos el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:

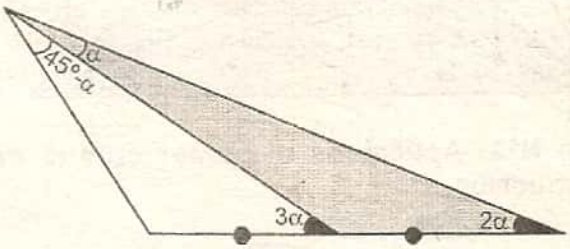


Aplicamos el teorema de existencia de triángulos.

$$8 - a < \underbrace{a - 8 + x < 8 + a}$$
$$a - 8 + x < 8 + a$$
$$x - 8 < 8 \Rightarrow x < 16$$
$$x_{max} = 15$$

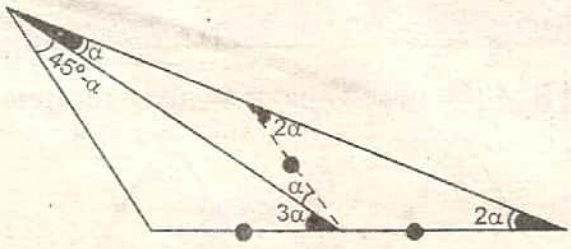
Solución N° 7

Se observa en la figura un triángulo que contiene ángulos en la relación de 1 a 2.

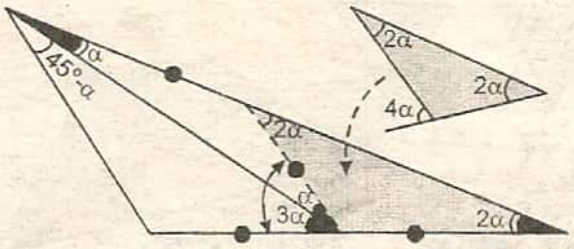


Paso N° 1

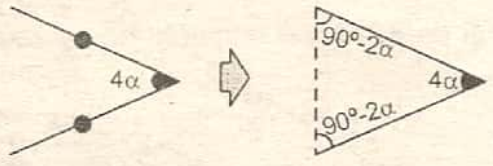
Trazamos la ceviana interna donde obtenemos la siguiente figura (primer criterio de construcción).

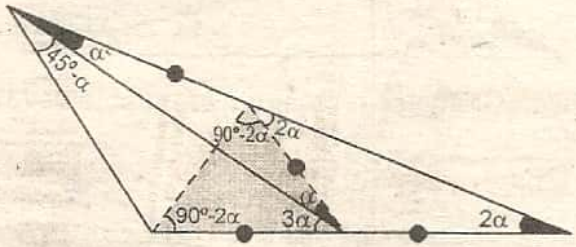


Paso Nº 2
Completamos los ángulos internos para obtener lados iguales y así encontrar triángulos isosceles.

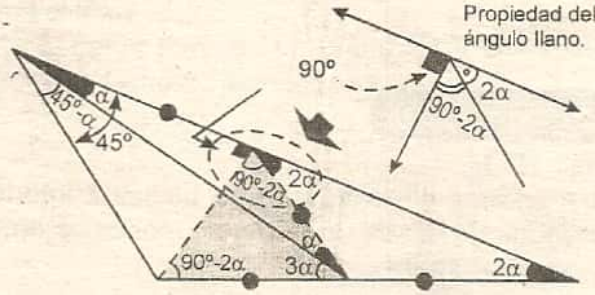


Paso Nº 3
Se observa una figura con 2 lados iguales, entonces realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles:

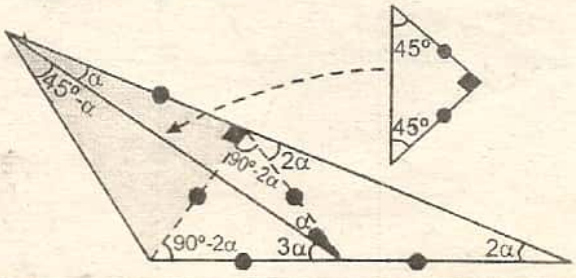




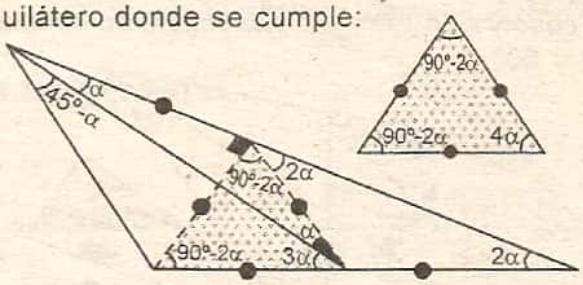
Paso Nº 4
Se observa un ángulo recto en la figura.



Paso Nº 5
Se observa un triángulo rectángulo notable de 45° (catetos iguales)



Paso Nº 6: Luego se obtiene un triángulo equilátero donde se cumple:

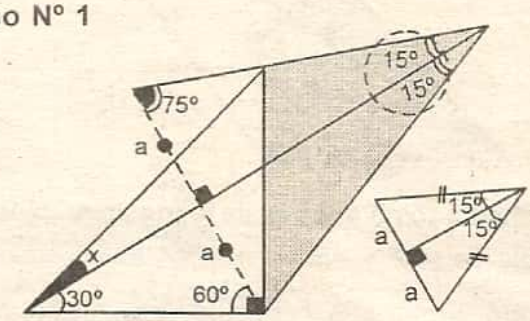


$$\Rightarrow \quad 4\alpha = 60^\circ$$
$$\alpha = 15^\circ$$

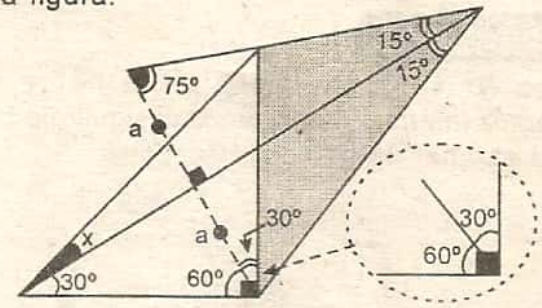
Solución Nº 8

Observamos una bisectriz interior en la figura, entonces aplicamos el segundo criterio de construcción.

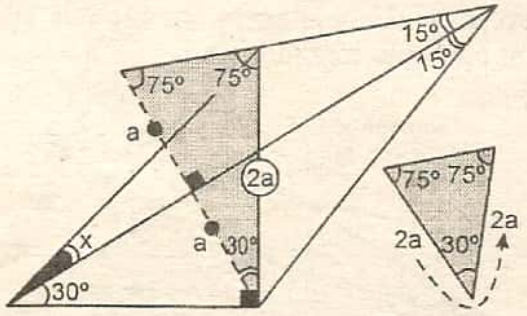
Paso Nº 1



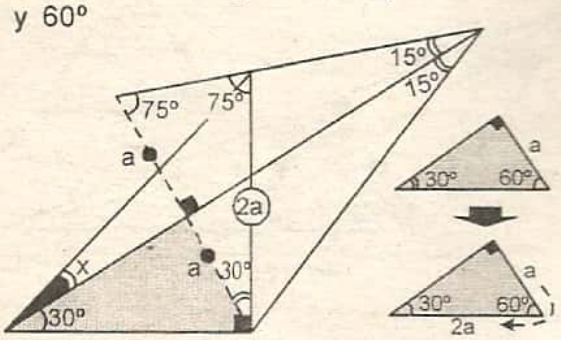
Paso Nº 2: Completando los ángulos internos en la figura.



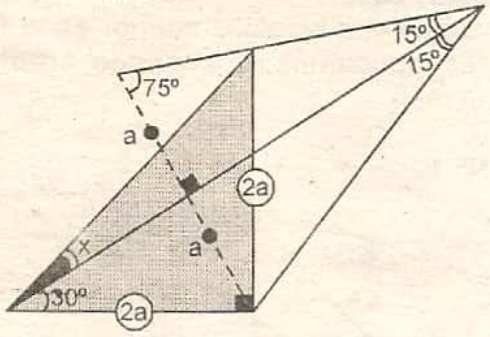
Paso Nº 3
Se observa que la figura sombreada es un triángulo isósceles.



Paso Nº 4
Se observa un triángulo rectángulo notable de 30º y 60º



Paso Nº 5: Gracias al paso anterior se obtiene la siguiente figura:

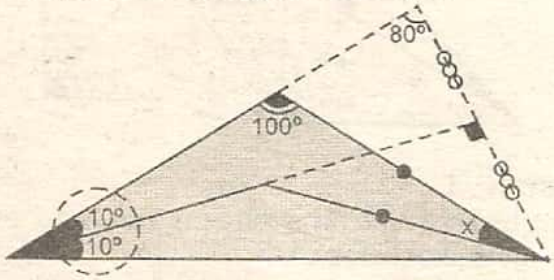


El triángulo sombreado es un triángulo rectángulo notable de (45º y 45º)

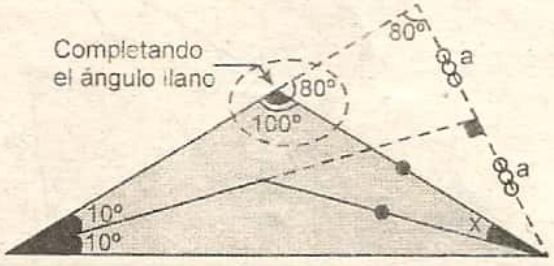
$$\therefore \quad x + 30^\circ = 45^\circ$$
$$x = 15^\circ$$

Solución Nº 9

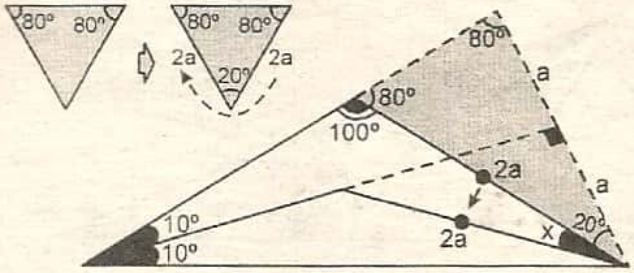
Paso Nº 1: Observamos en la figura una bisectriz interior y realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.



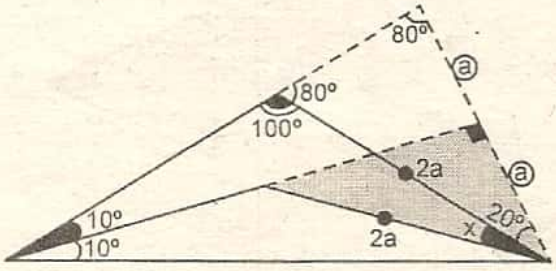
Paso Nº 2: Completamos los ángulos internos en el triángulo trazado.



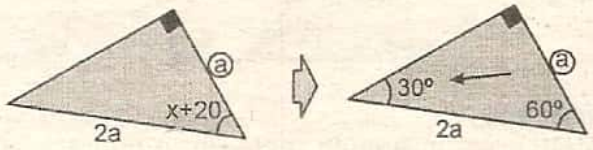
Paso Nº 3
Se observa un nuevo triángulo isósceles en la figura sombreada.



Paso Nº 4
Se observa un triángulo rectángulo con las siguientes características:



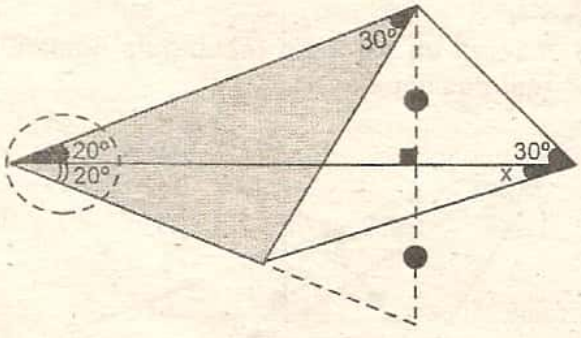
Donde el triángulo rectángulo es notable de (30º y 60º)



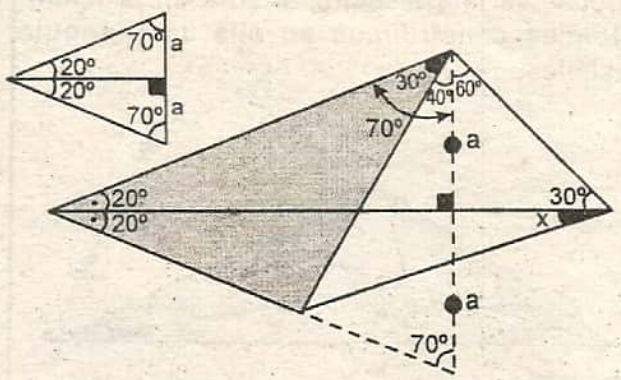
$$\Rightarrow x + 20^\circ = 60^\circ \Rightarrow \mathbf{x = 40^\circ}$$

Solución Nº 10

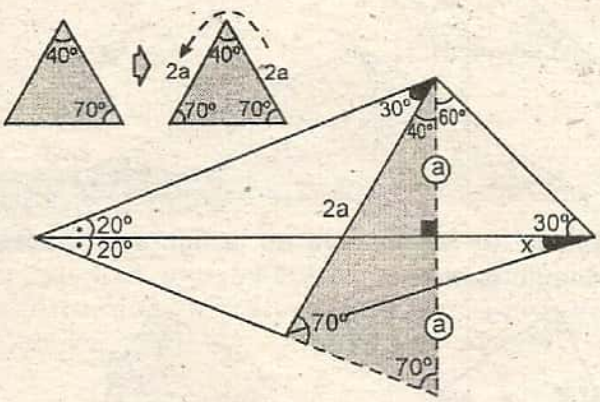
Paso Nº 1
Observamos en la figura una bisectriz interior entonces trazamos un triángulo isósceles de la siguiente manera:



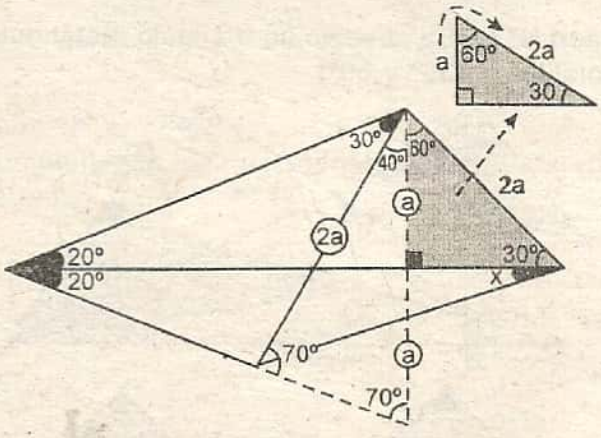
Paso Nº 2
Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.



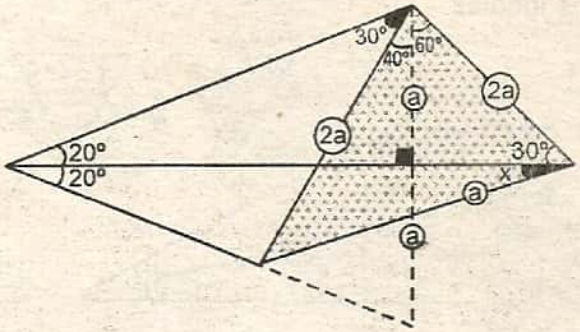
Paso Nº 3
Se observa un triángulo isósceles en la figura sombreada.

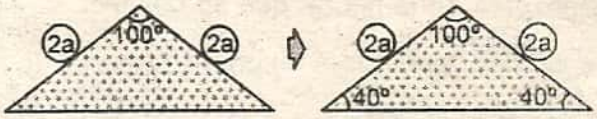


Paso Nº 4
Se observa también un triángulo notable (30° y 60°) en la figura sombreada.



Paso Nº 5
Ahora se observa un nuevo triángulo isósceles.

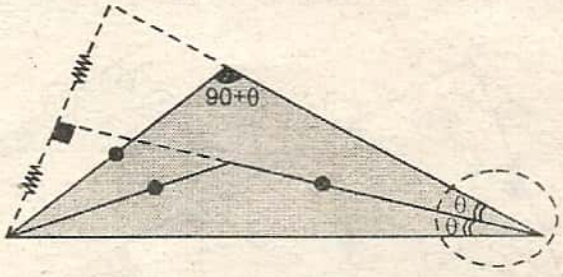




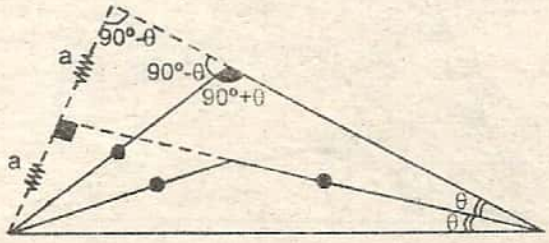
$\Rightarrow x + 30° = 40°$
$x = 10°$

Solución Nº 11

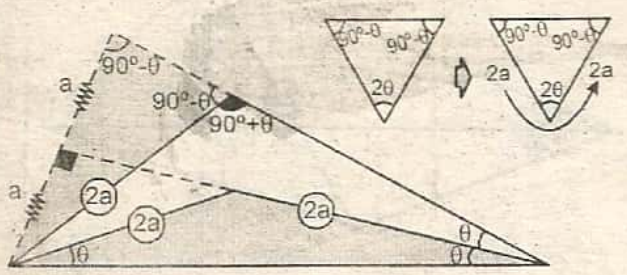
Paso Nº 1
Se observa una bisectriz en la figura; entonces contruimos en ella un triángulo isósceles.



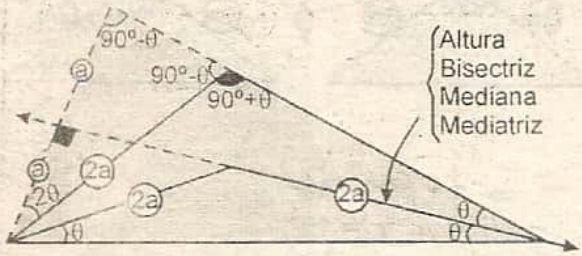
Paso Nº 2
Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.



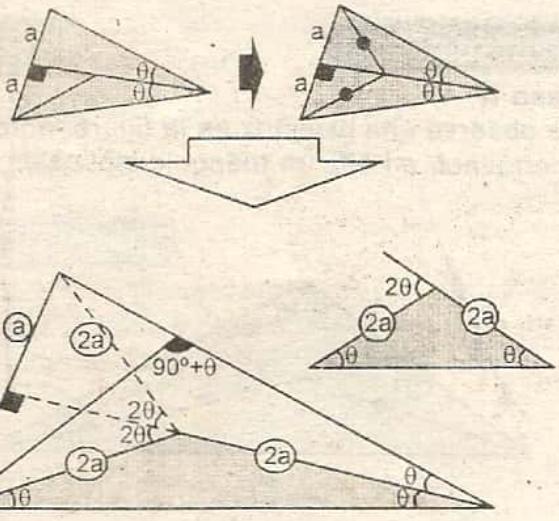
Paso N° 3
Se observa en la figura un triángulo isósceles y lados iguales.



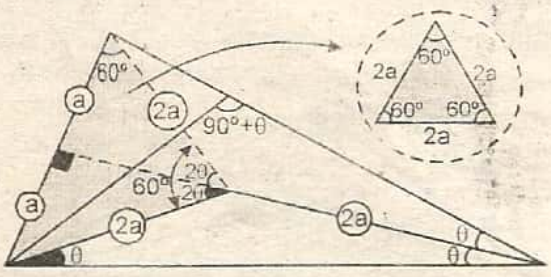
Paso N° 4
Se observa en la figura, que se cumple:



Se cumple:



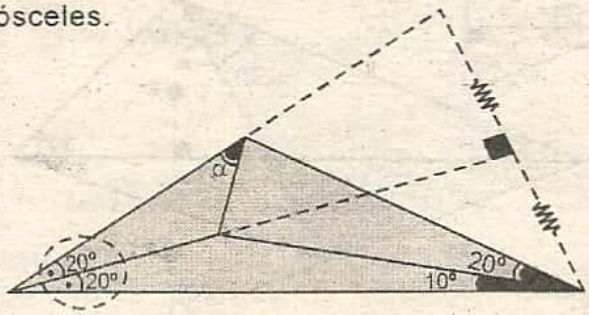
Paso N° 5
Se observa la figura interna un triángulo equilátero.



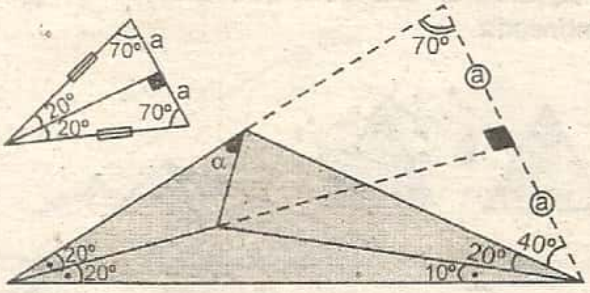
$\therefore \quad 4\theta = 60° \Rightarrow \theta = 15°$

Solución N° 12

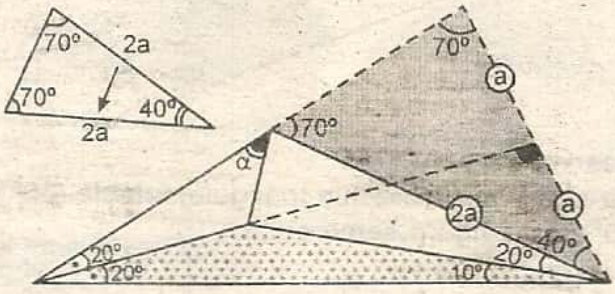
Paso N° 1
Se observa una bisectriz interna en la figura, entonces construimos en ella un triángulo isósceles.



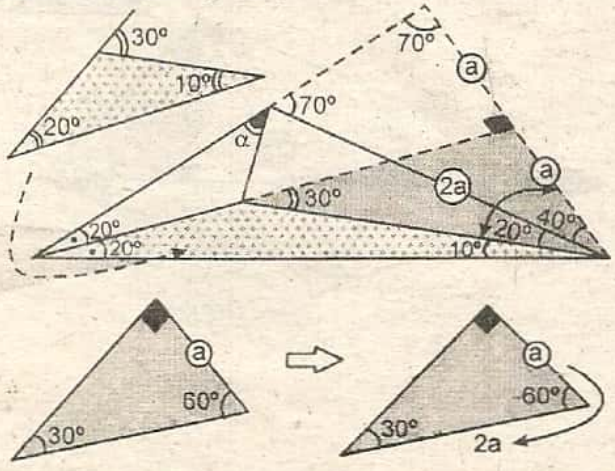
Paso N° 2
Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.



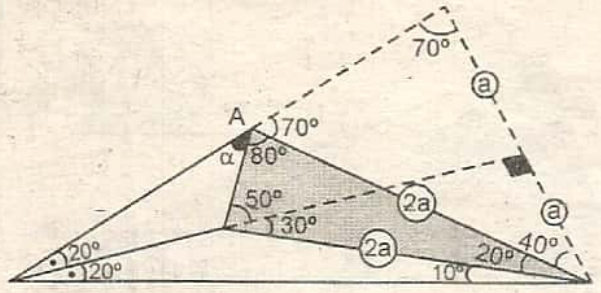
Paso N° 3: Se observa en la figura un nuevo triángulo isósceles.

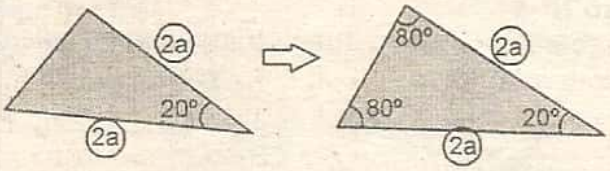


Paso N° 4: Se observa un triángulo rectángulo notable de (30° y 60°)



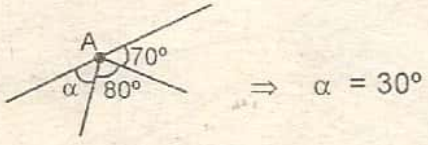
Paso Nº 5: Se observa un nuevo triángulo isósceles donde cumple:





Paso Nº 6

Ahora observamos un ángulo llano en "A".

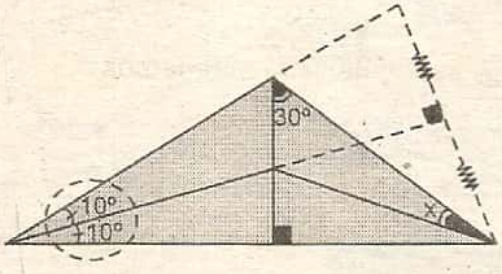


$\Rightarrow \quad \alpha = 30°$

Solución Nº 13

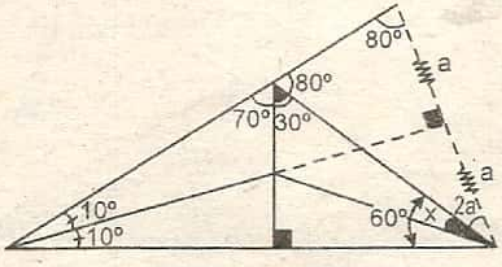
Paso Nº 1

Se observa una bisectriz interior entonces construimos exteriormente un triángulo isósceles.



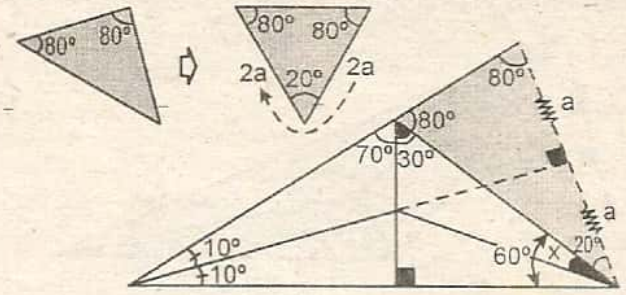
Paso Nº 2

Completamos los ángulos internos en la figura obtenida.



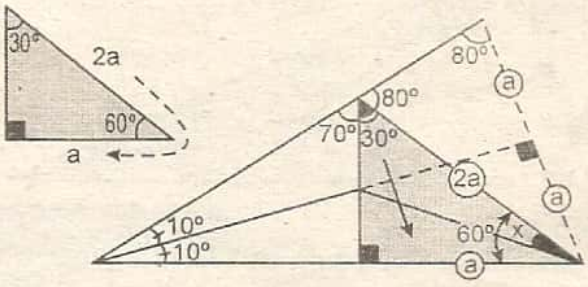
Paso Nº 3

Se observa un triángulo isósceles interno al triángulo construido.



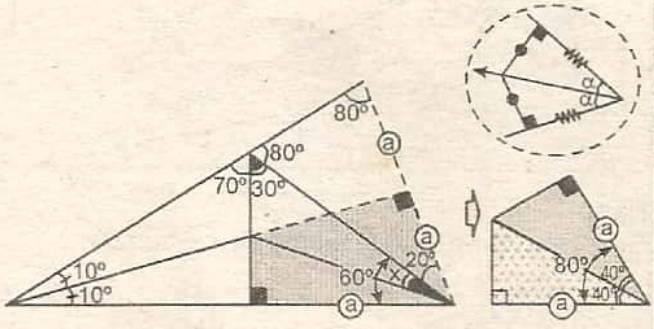
Paso Nº 4

Se observa un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°



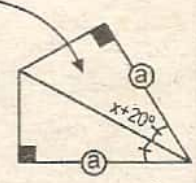
Paso Nº 5

Ahora se observa la siguiente figura donde se tiene la propiedad de la bisectriz.



Se cumple

Por la propiedad



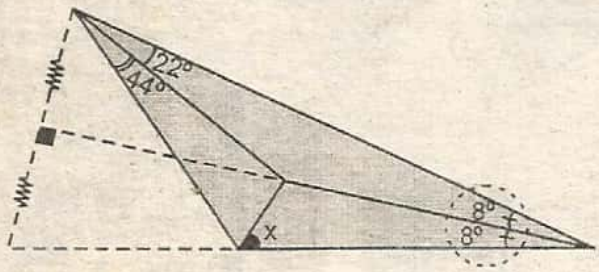
$\therefore \quad x + 20° = 40°$

$x = 20°$

Solución Nº 14

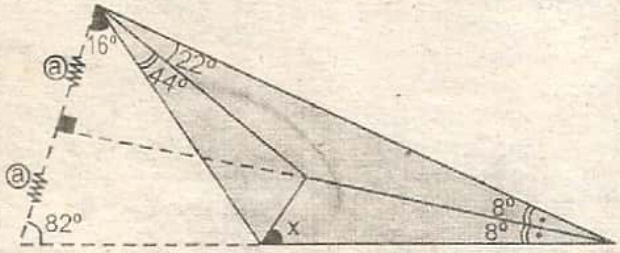
Paso Nº 1

Se observa una bisectriz interior entonces construimos un triángulo isósceles exteriormente.



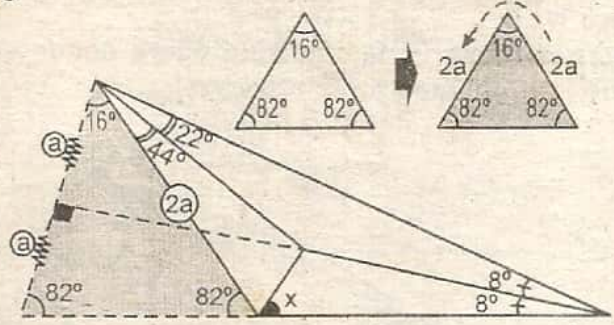
Paso Nº 2

Completamos los ángulos internos en la figura obtenida.



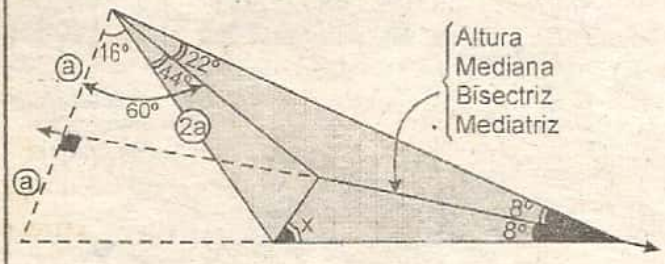
Paso Nº 3

Se observa un triángulo isósceles interior a la figura obtenida.

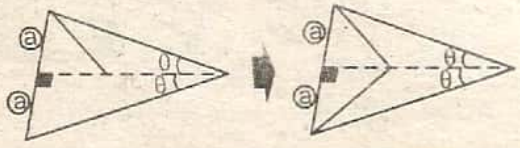


Paso Nº 4

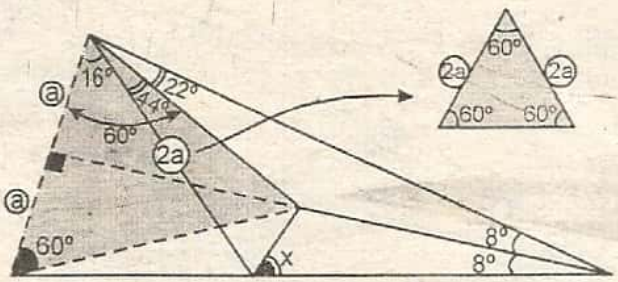
Se observa en la figura donde se cumple:



Donde se cumple:

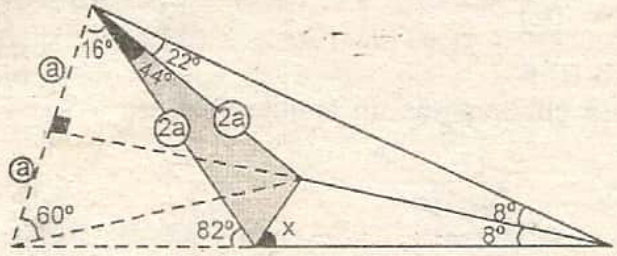


Paso Nº 5: En la figura sombreada también se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



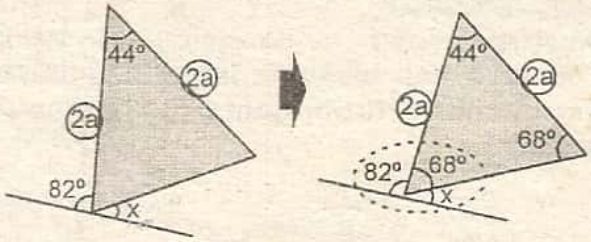
Paso Nº 6

Luego se obtiene un nuevo triángulo isósceles interno a la figura



Paso Nº 7

En la figura sombreada se observa:



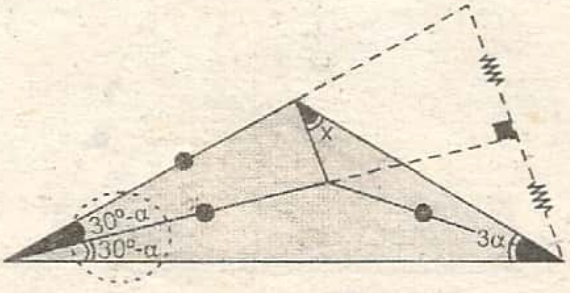
∴ En el ángulo llano obtenemos:

$\Rightarrow x = 30°$

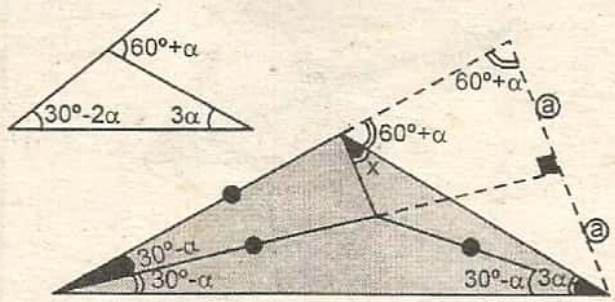
Solución Nº 15

Paso Nº 1

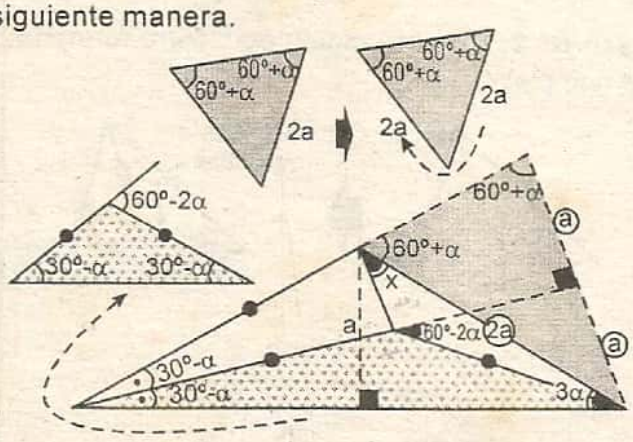
Se observa una bisectriz interior y se traza un triángulo isósceles externamente.



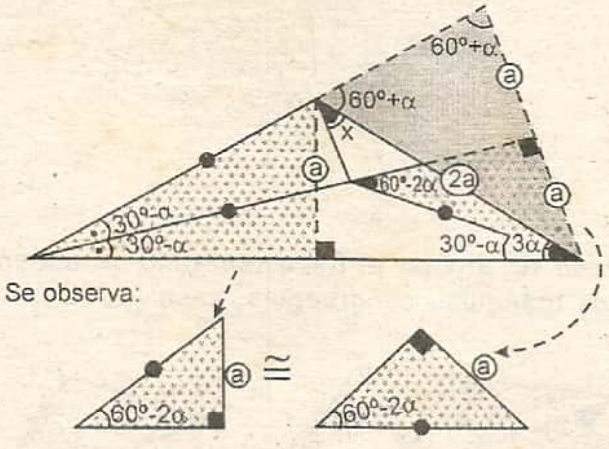
Paso N° 2
Completamos ángulos internos en la figura.



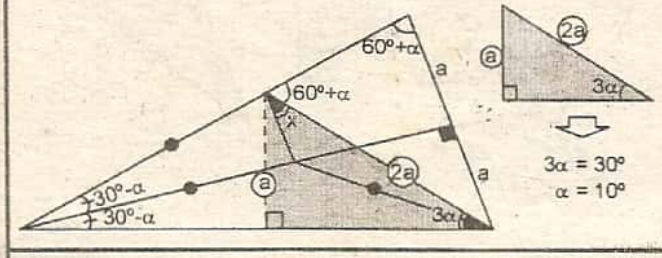
Paso N° 3
Se observa un triángulo isósceles de la siguiente manera.



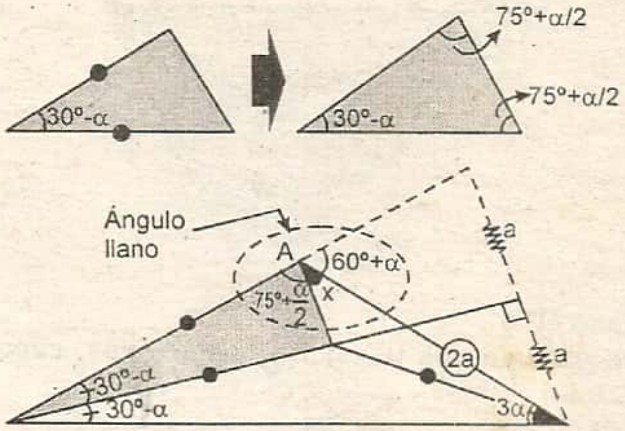
Paso N° 4
Hacemos el siguiente trazo, para encontrar rectángulos, triángulos congruentes.



Paso N° 5: Se observa un triángulo rectángulo notable de 30° y 60° en la figura sombreada donde se cumple:



Paso N° 6: Finalmente tenemos la figura, sombreada y se obtiene las siguientes relaciones.

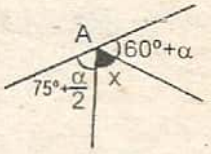


$$75° + \frac{\alpha}{2} + x + 60° + \alpha = 180°$$

$$\frac{3\alpha}{2} + x = 45°$$

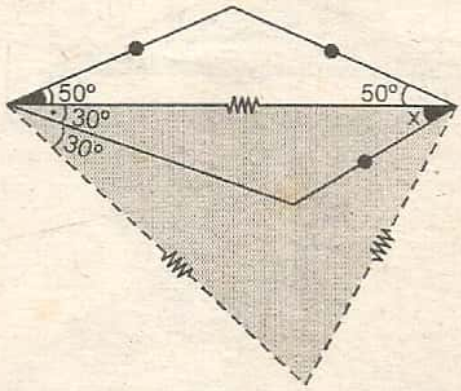
Pero: $\alpha = 10°$

$\Rightarrow$ $x = 30°$

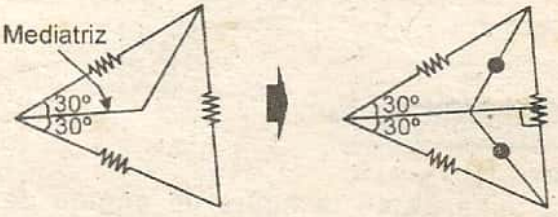


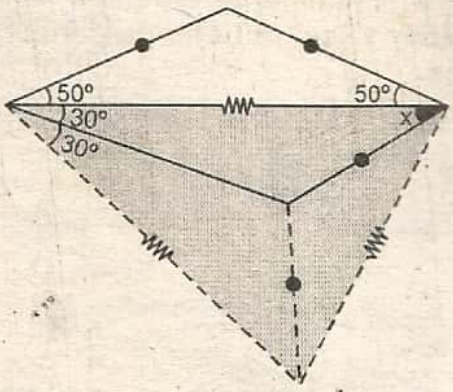
Solución N° 16

Paso N° 1
Se observa en la figura un ángulo de 30°, entonces formamos un triángulo equilátero exteriormente (tercer criterio de construcción)

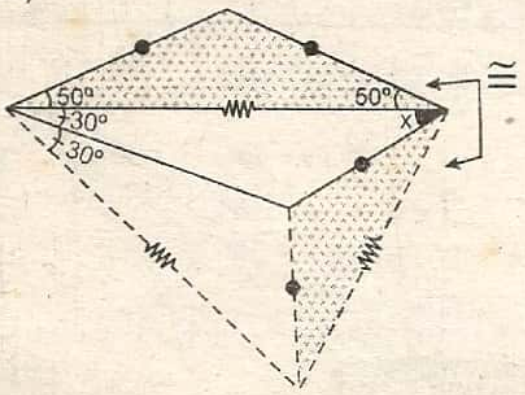


Paso N° 2
En el triángulo equilátero formado, se cumple:

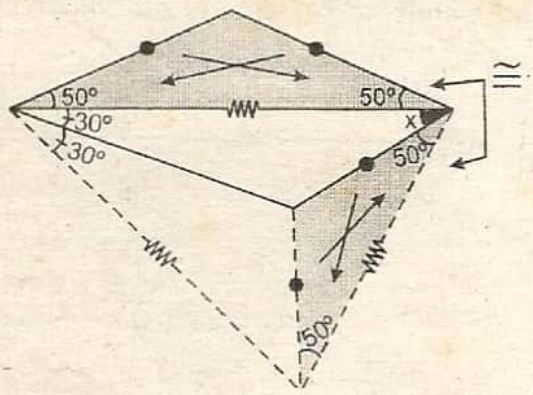




Paso Nº 3
Se observa dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



Paso Nº 4
Aplicando el principio de congruencia: "A ángulos iguales se oponen lados iguales".



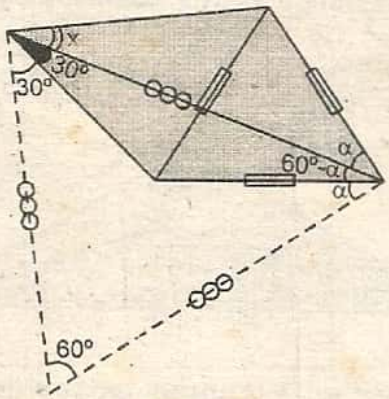
Luego la figura se cumple:

$$\therefore x + 50^\circ = 60^\circ$$

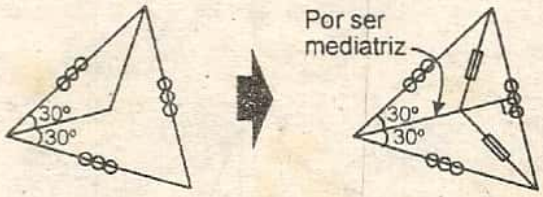
$$x = 10^\circ$$

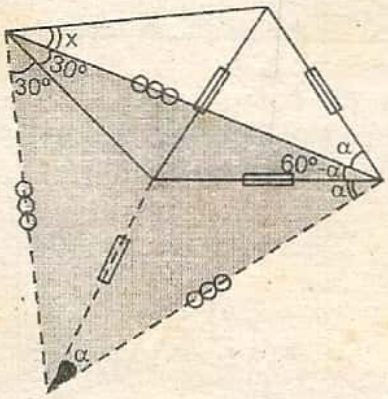
Solución Nº 17

Paso Nº 1
Se observa en la figura un ángulo de 30° entonces se forma un triángulo equilátero, externamente.

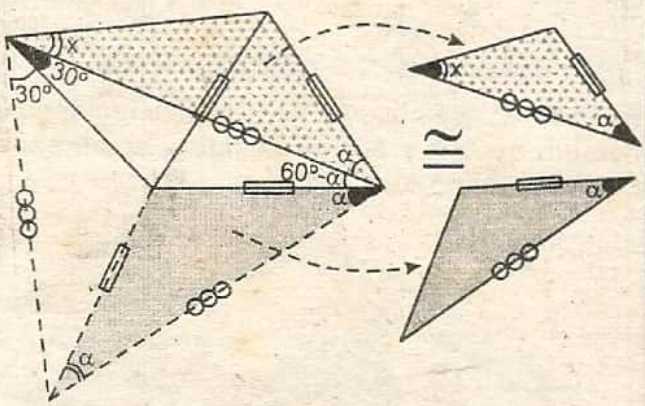


Paso Nº 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:

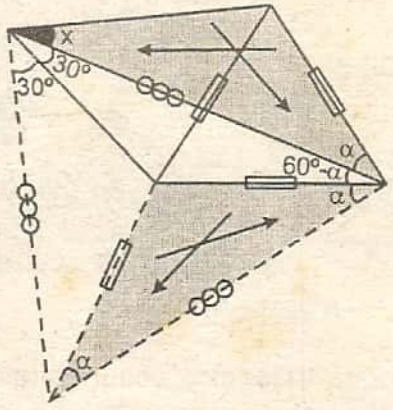




Paso Nº 3: Con el trazo realizado se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Paso N° 4
Aplicando el principio de congruencia: "A ángulos iguales se oponen lados iguales".

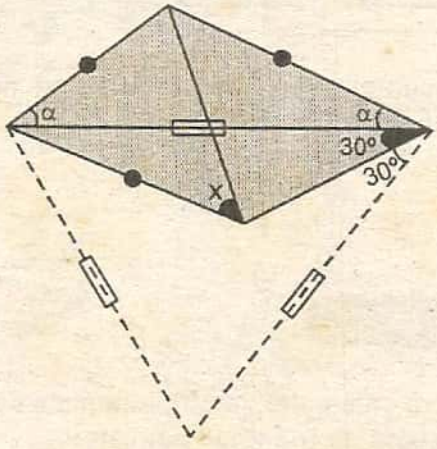


∴ de la figura se cumple:

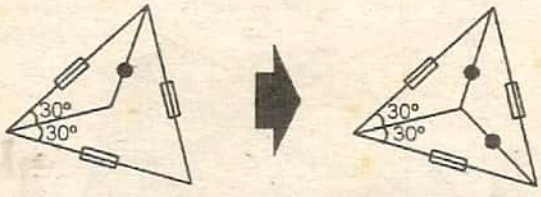
$x = \alpha$

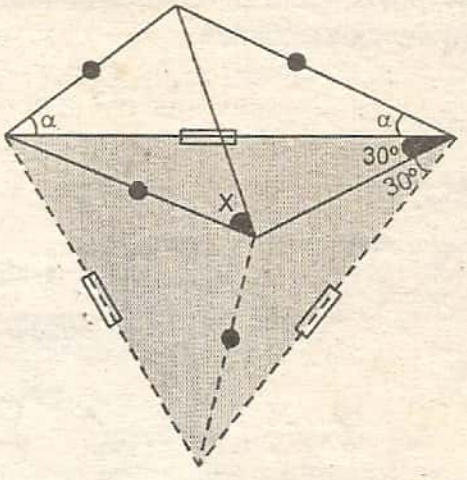
Solución N° 18

Paso N° 1
Se observa en la figura un ángulo de 30° entonces se forma un triángulo equilátero, externamente (tercer criterio de construcción)

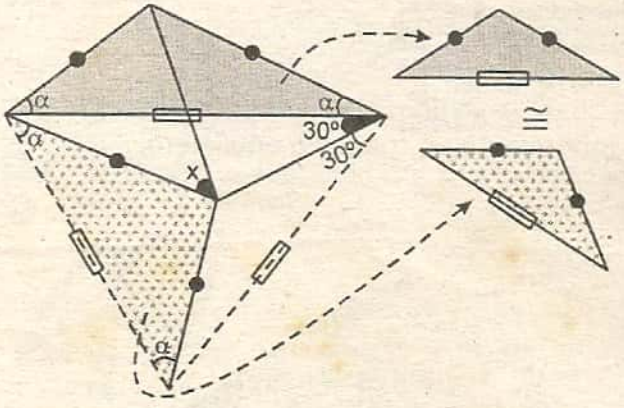


Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:

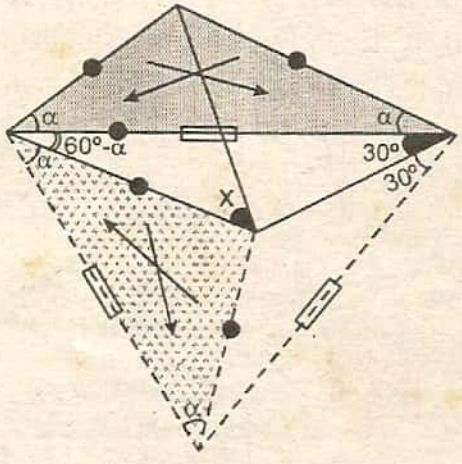




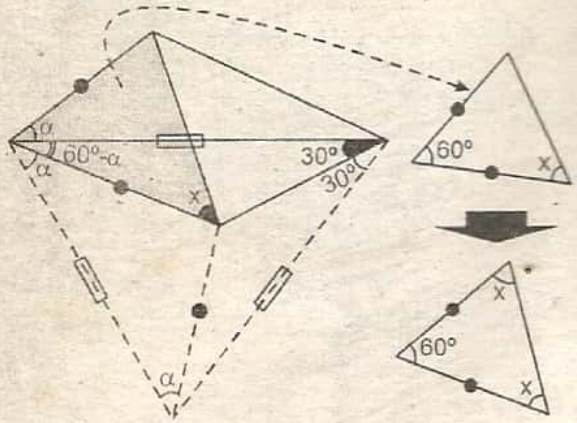
Paso N° 3: Con el trazo realizado, se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



Paso N° 4: Aplicando el principio de congruencia "A ángulos iguales se oponen lados iguales y viceversa"



Paso N° 5
Se observa en la figura sombreada un triángulo equilátero donde se cumple:

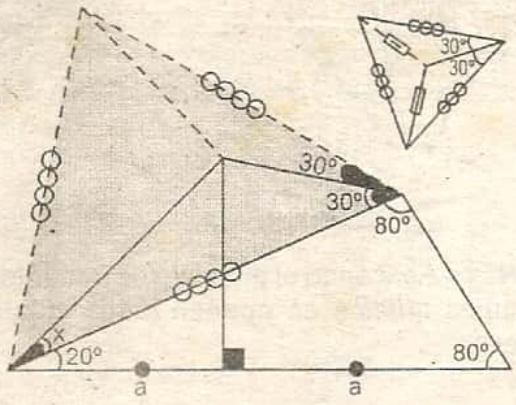


$\therefore\ x = 60°$

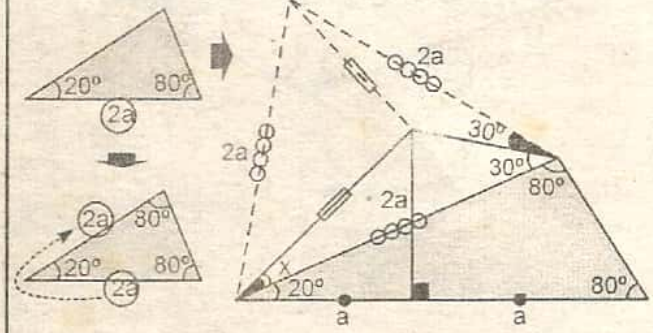
Solución N° 19

Paso N° 1
Se observa un ángulo de 30° entonces se forma exteriormente un triángulo equilátero.

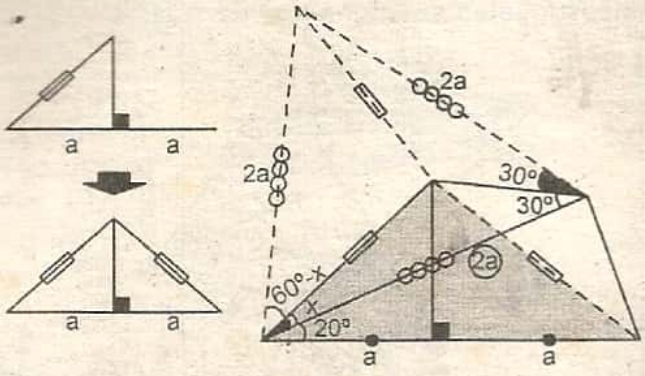
También:



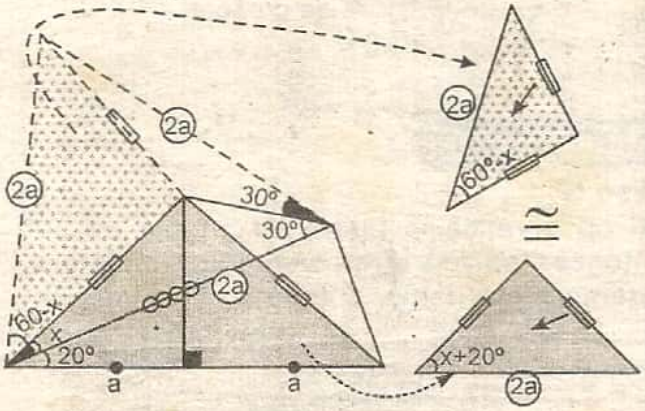
Paso N° 2: En la nueva figura se observa un triángulo isósceles.



Paso N° 3: Se tiene en la figura, una recta mediatriz y se cumple:



Paso N° 4
Se obtiene dos triángulos congruentes; caso: (L.A.L)



Aquí se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

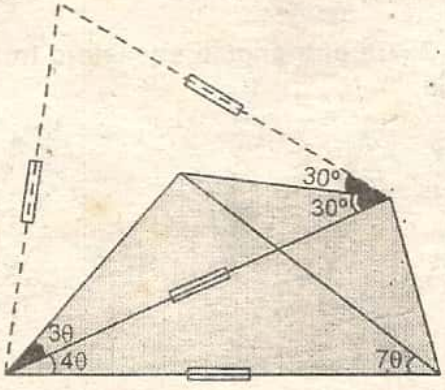
$\therefore\ 60° - x = x + 20°$

$40° = 2x$

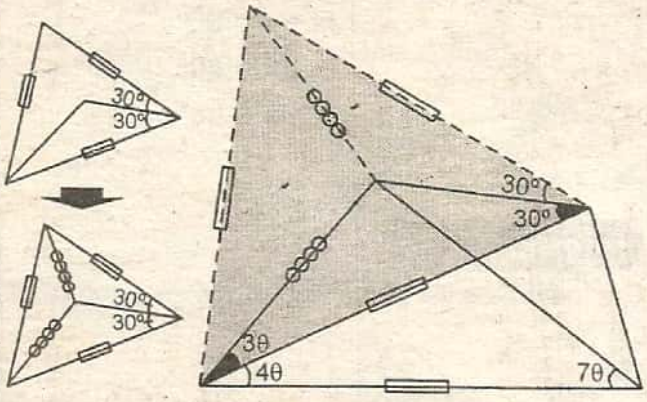
$20° = x$

Solución N° 20

Paso N° 1
Se observa un ángulo de 30°, entonces se traza exteriormente un triángulo equilátero.

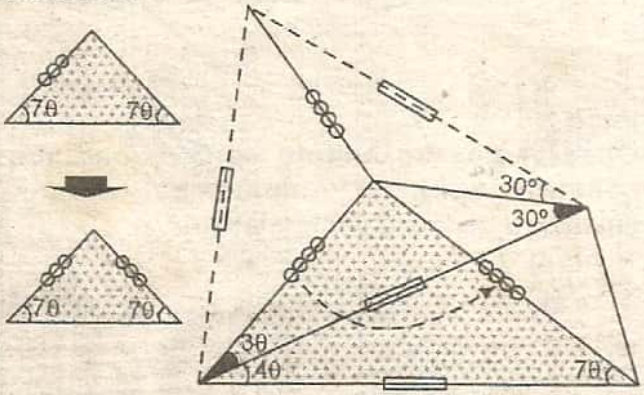


Paso Nº 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



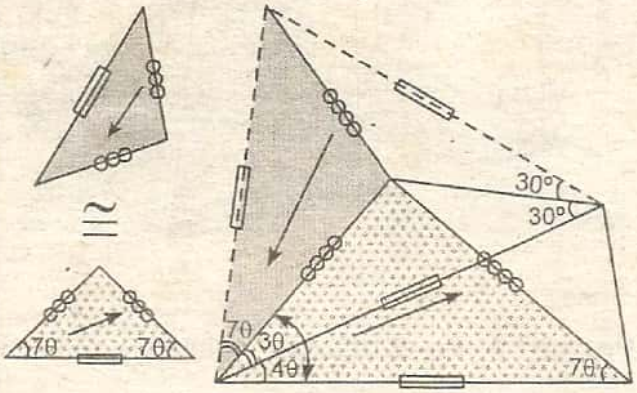
Paso Nº 3

Se observa en el interior de la figura un triángulo isósceles.



Paso Nº 4

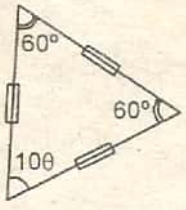
Ahora se observa dos triángulos congruentes, caso: (L.L.L)



Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

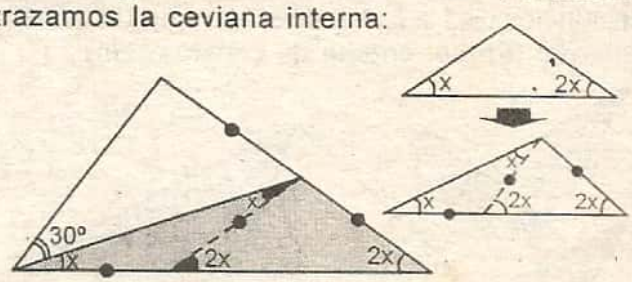
∴ En la figura se cumple:

$$7\theta + 3\theta = 60^\circ$$
$$10\theta = 60^\circ$$
$$\theta = 6^\circ$$



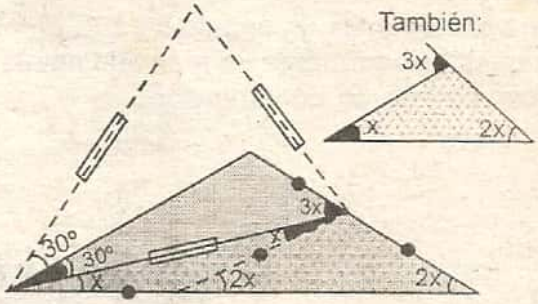
Solución Nº 21

Paso Nº 1: Se observa en la figura sombreada a ella ángulos en la relación 1 a 2, entonces trazamos la ceviana interna:

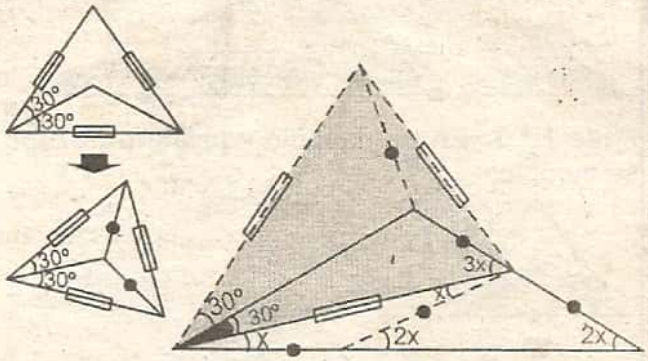


Paso Nº 2

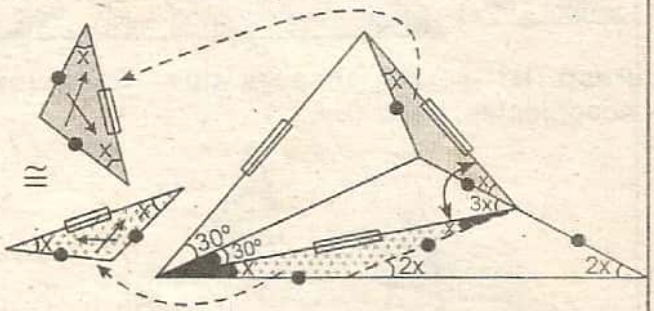
Ahora se observa un ángulo de 30° entonces trazamos exteriormente un triángulo equilátero.



Paso Nº 3: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



Paso Nº 4: Ahora se observa dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



∴ De la figura observa:

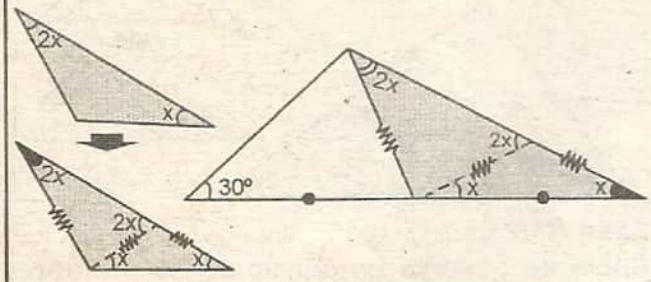
$$x + 3x = 60^\circ$$
$$4x = 60^\circ$$
$$x = 15^\circ$$

"Un esfuerzo más y lo que alguna vez pensaste podría ser un fracaso, se convierte en un gran éxito. (Anónimo)

Solución Nº 22

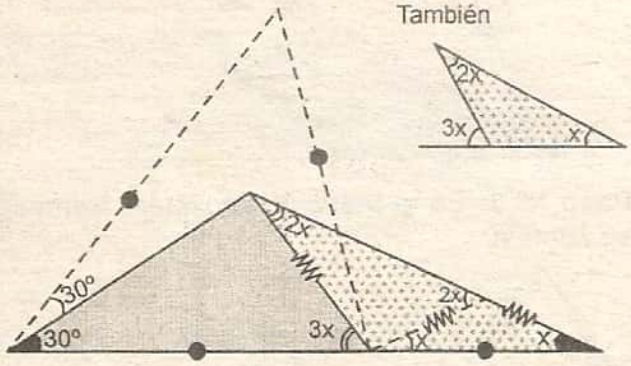
Paso Nº 1

Interiormente en la figura se observa ángulos en la relación de 1 a 2, entonces trazamos la ceviana interna. (Primer criterio de construcción)

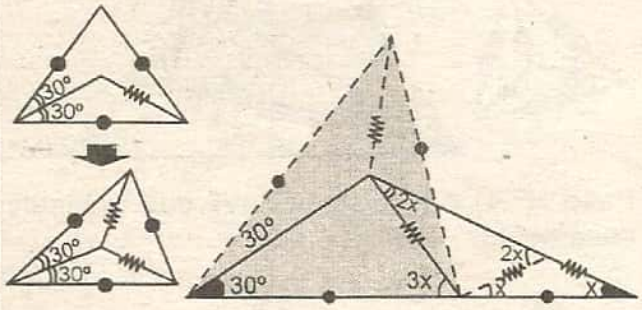


Paso Nº 2

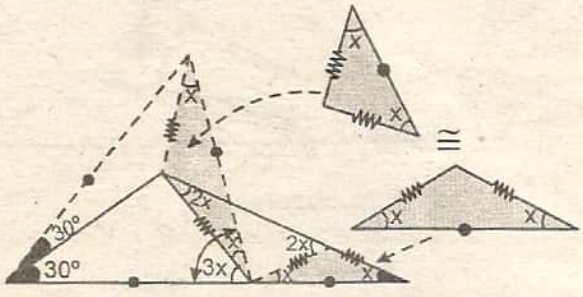
Ahora observamos un ángulo de 30°, entonces trazamos exteriormente un triángulo equilátero, (tercer criterio de construcción)



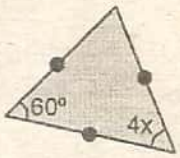
Paso Nº 3: En el triángulo equilátero trazado, se cumple:



Paso Nº 4: Se observa dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



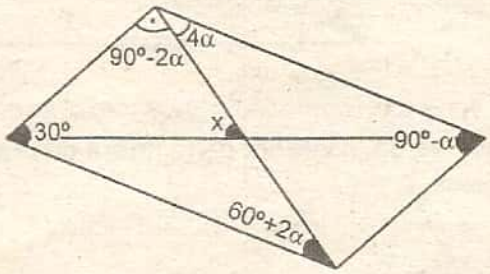
∴ Se observa de la figura en el triángulo equilátero.



$$3x + x = 60°$$
$$4x = 60°$$
$$x = 15°$$

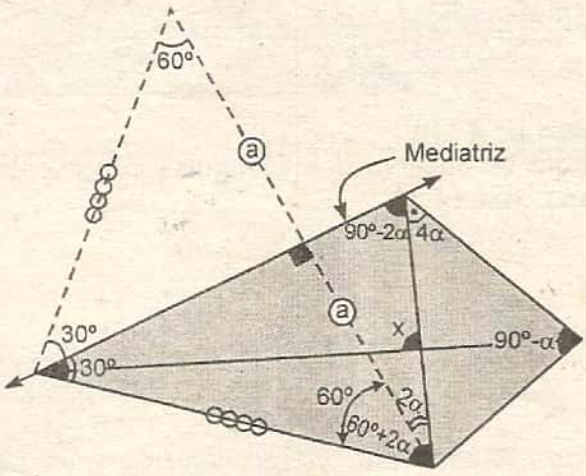
Solución Nº 23

Completamos los ángulos internos en el triángulo.

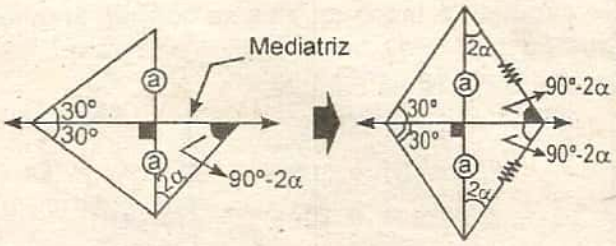


Paso Nº 1

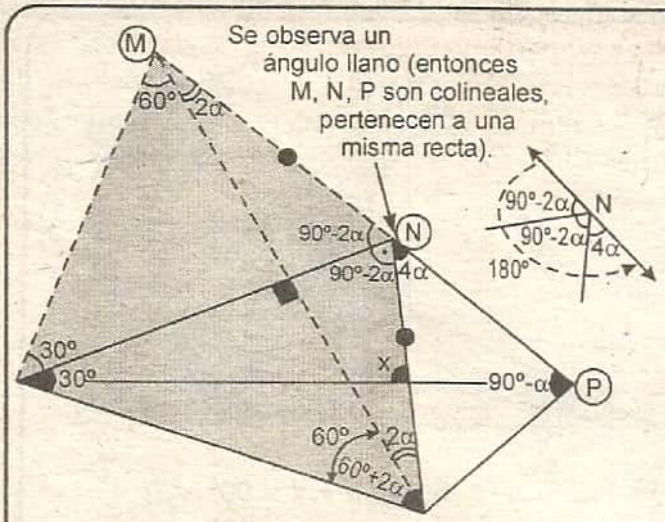
Observamos un ángulo de 30°, entonces construimos exteriormente un triángulo equilátero de la siguiente manera.



Paso Nº 2: En el triángulo equilátero trazado, se cumple:

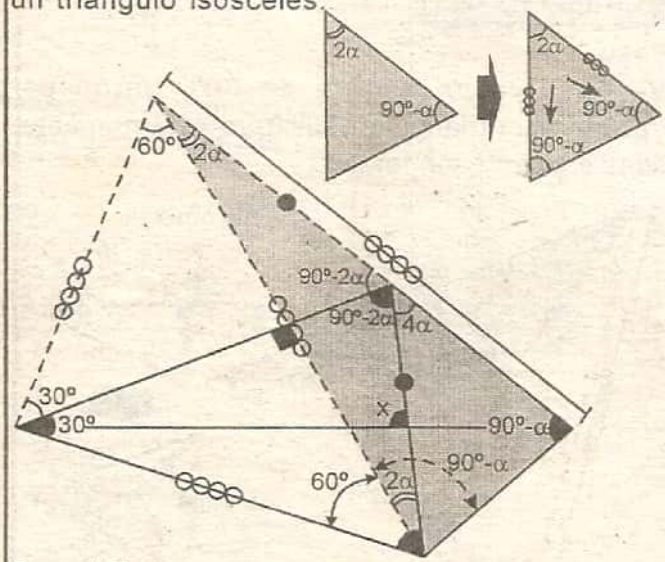


"Un esfuerzo más y lo que alguna vez pensaste podría ser un fracaso, se convierte en un gran éxito. (Anónimo)



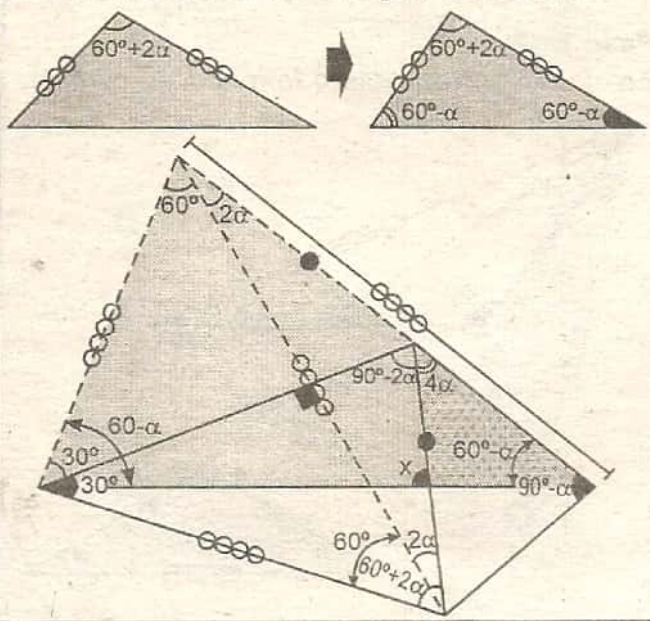
Paso Nº 3

Se observa, la siguiente figura sombreada es un triángulo isósceles.



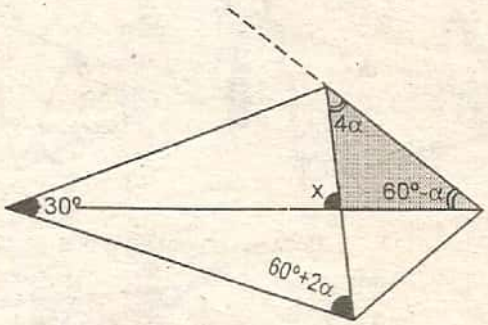
Paso Nº 4

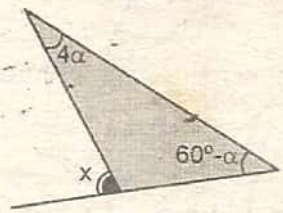
Se observa un nuevo triángulo isósceles.



Paso Nº 6

Ahora se observa interiormente de en figura resultante un triángulo con las siguientes características:





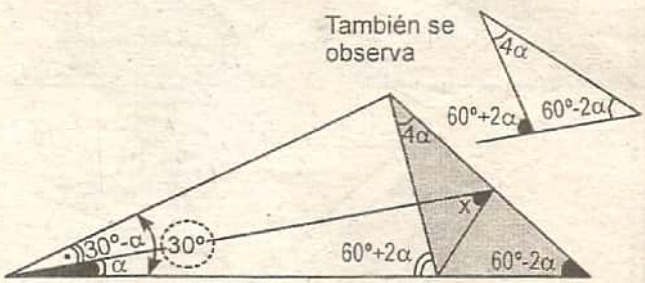
$x = 4\alpha + 60° - \alpha$

$x = 60° + 3\alpha$

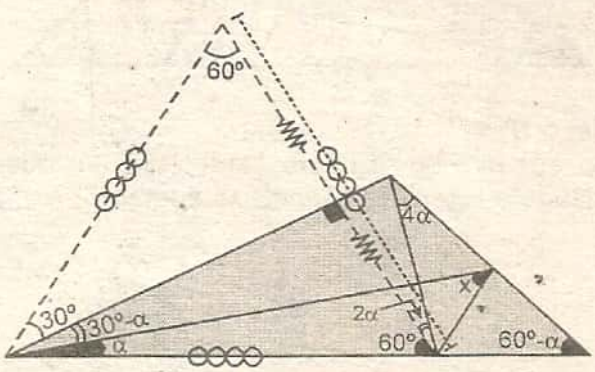
Solución Nº 24

Paso Nº 1

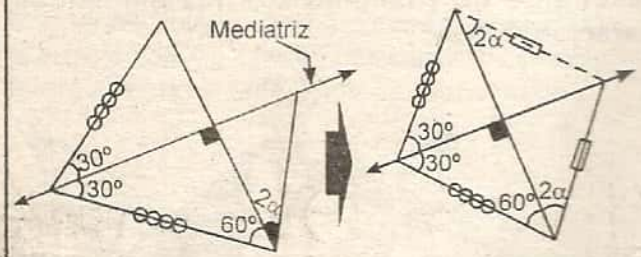
En la figura se observa un ángulo de 30°



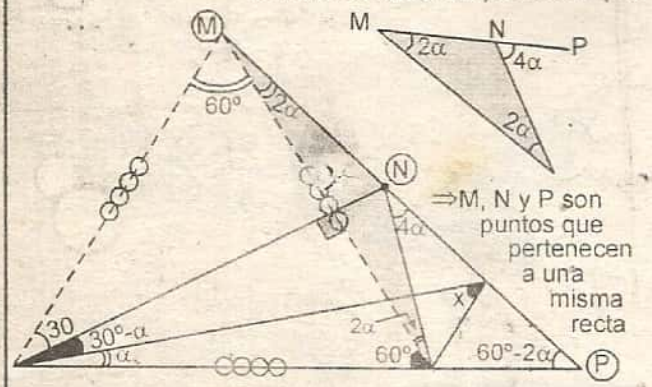
Ahora trazamos un triángulo equilátero exteriormente.



Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



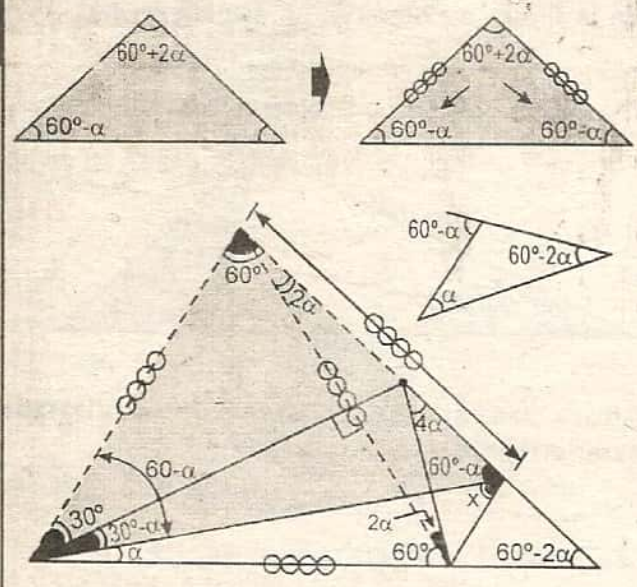
También se observa que se cumple:



⇒M, N y P son puntos que pertenecen a una misma recta

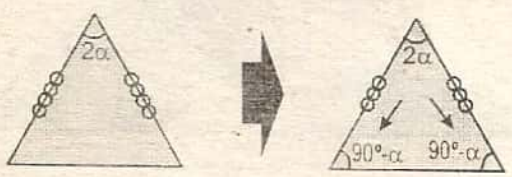
Paso N° 3

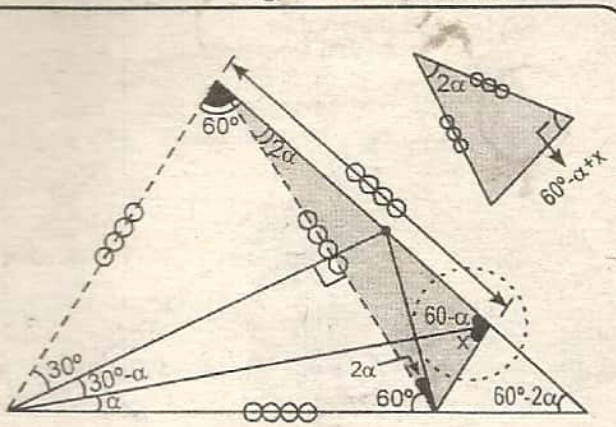
Se obtiene un triángulo isósceles.



Paso N° 4

Se observa en la figura sombreada un nuevo triángulo isósceles, donde se cumple:





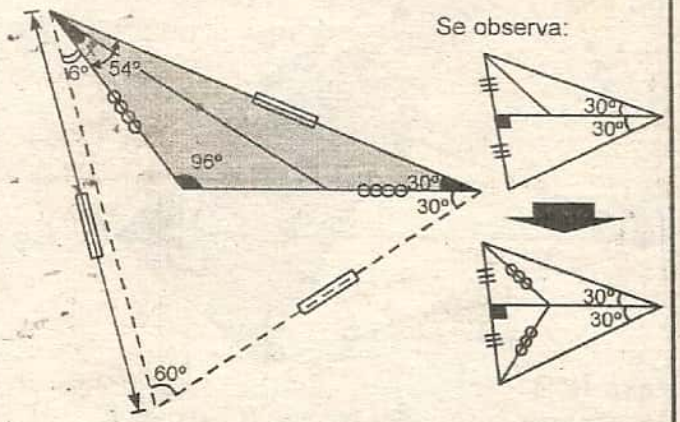
$$\Rightarrow \quad 60° - \alpha + x = 90° - \alpha$$

$$x = 30°$$

Solución N° 25

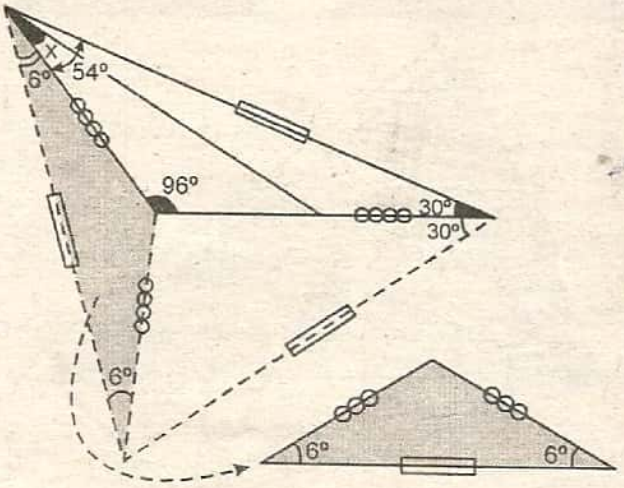
Paso N° 1

Se observa un ángulo de 30°, entonces trazamos un triángulo equilátero externamente de la siguiente manera.



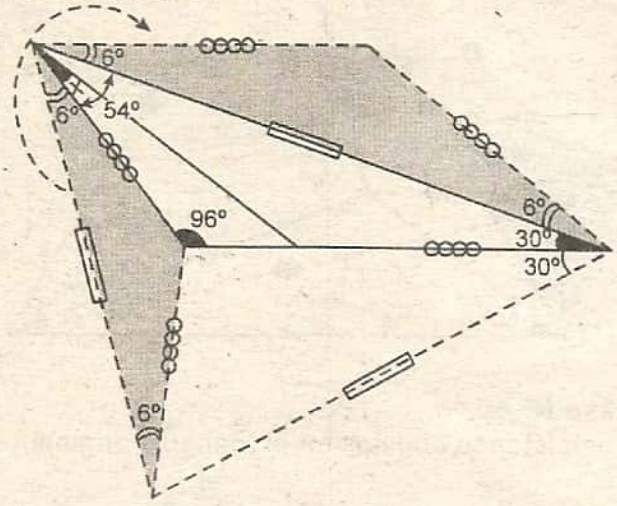
Paso N° 2

En el triángulo equilátero formado, se cumple:

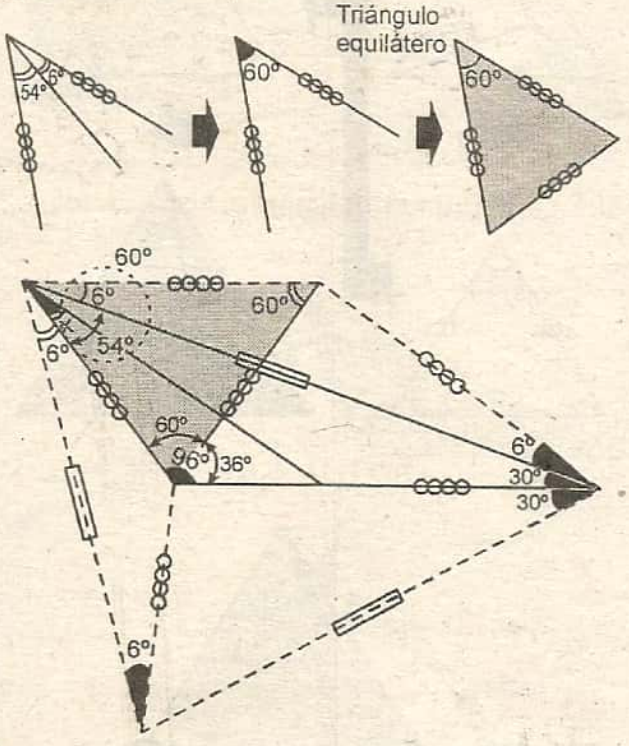


Paso N° 3

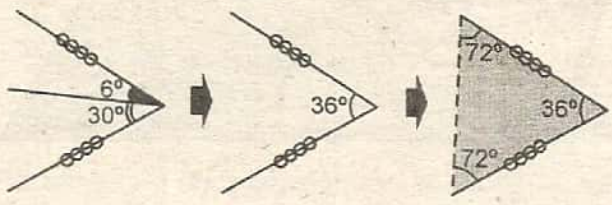
Ahora buscamos un triángulo externo congruente al triángulo isósceles obtenido en el paso anterior.

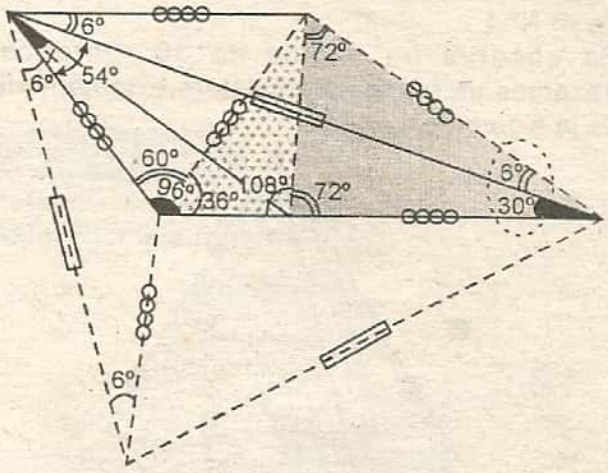


Paso N° 4: Y observa que se obtiene la siguiente figura donde cumple:

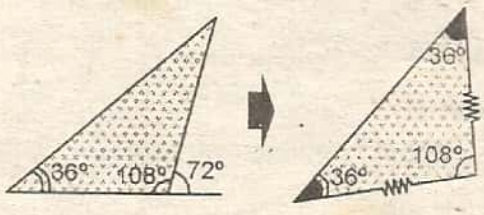


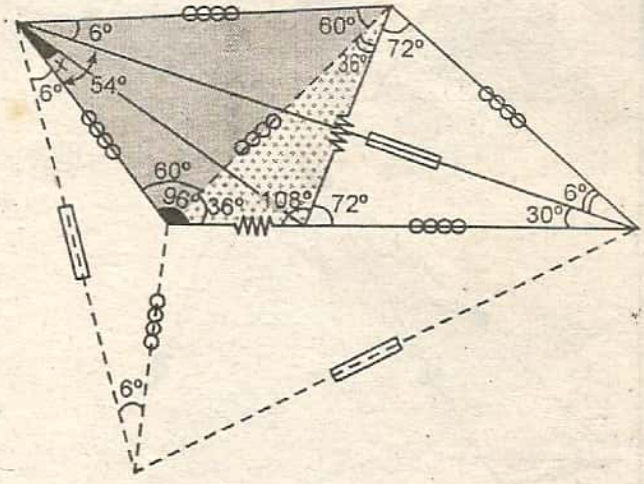
Paso N° 5: En la figura se obtiene un triángulo isósceles, de la siguiente manera:



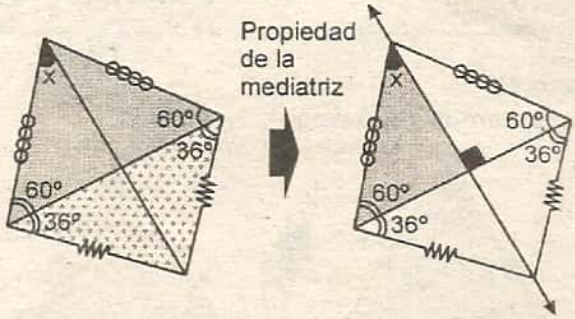


Se observa también un nuevo triángulo isósceles:





Con los trazos realizados se obtiene la siguiente figura, donde se cumple:

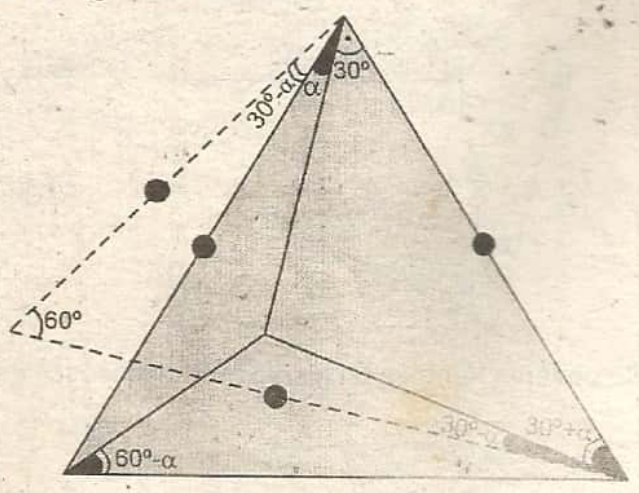


$\therefore\ x = 30°$

Solución Nº 26

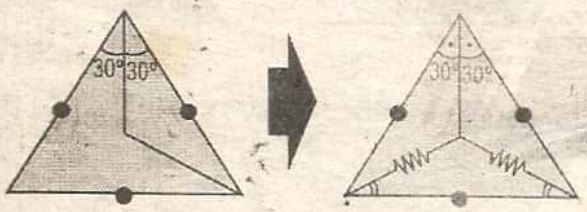
Paso Nº 1 :

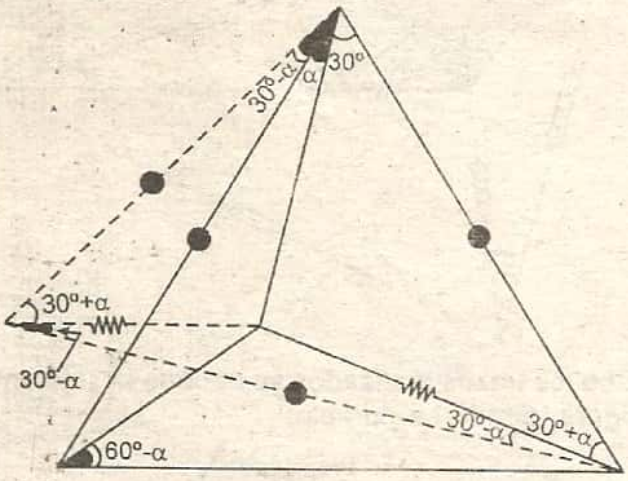
Se observa un ángulo de 30° entonces trazamos un triángulo equilátero externamente de la siguiente manera:



Paso Nº 2:

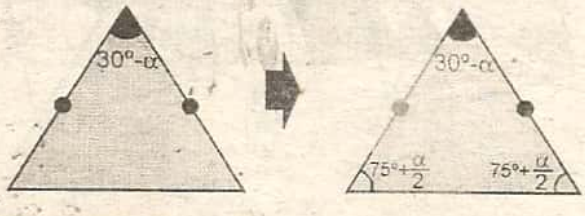
En el triángulo equilátero trazado, se cumple:

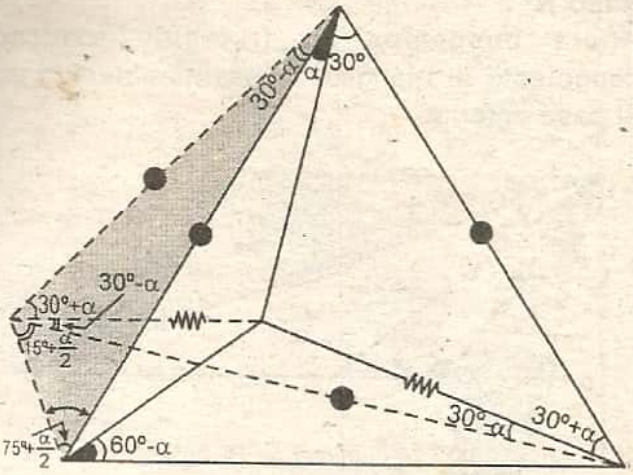




Paso Nº 3:

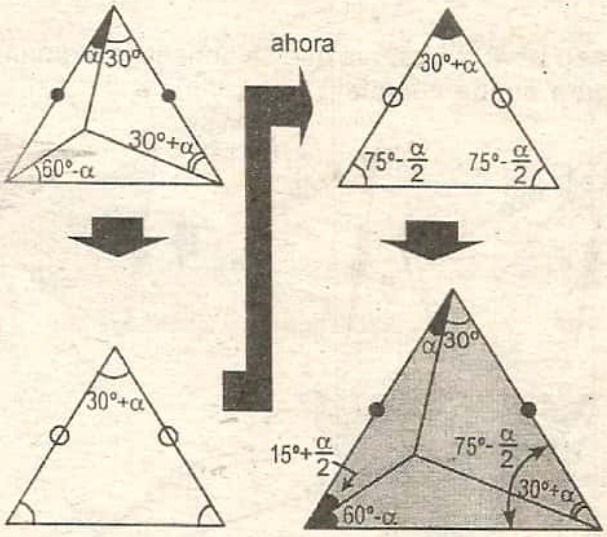
Observamos un triángulo isósceles:

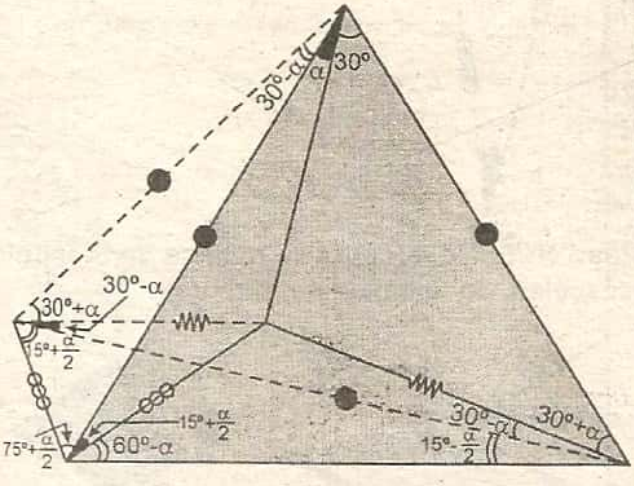




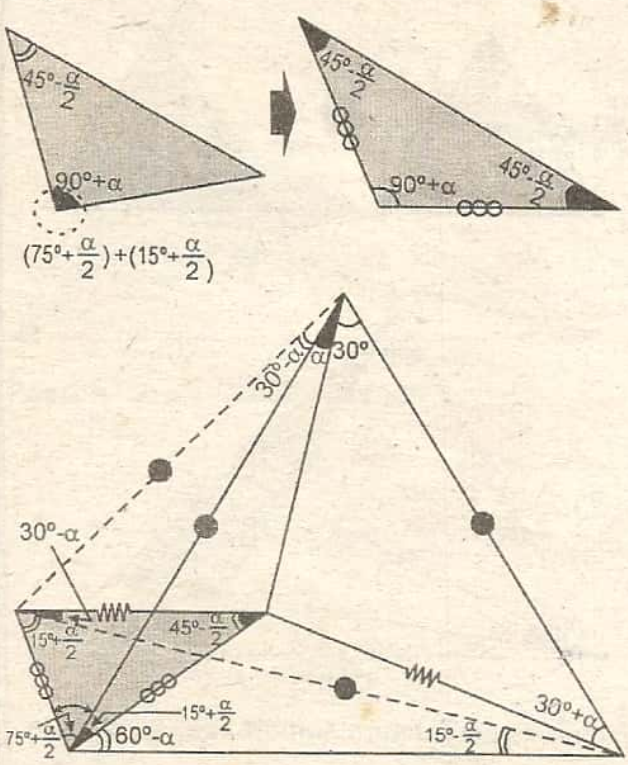
Paso Nº 4:

Completando ángulos en el triángulo original.

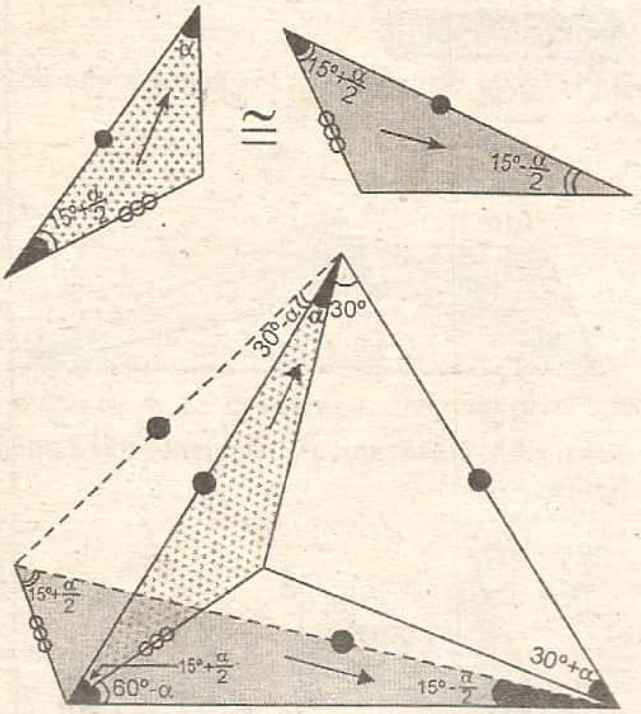




Paso Nº 5:
Se observa el siguiente triángulo sombreado en la figura:



Paso Nº 6:
Se obtiene dos triángulos congruentes caso (L.A.L.)



Por principio de congruencia: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

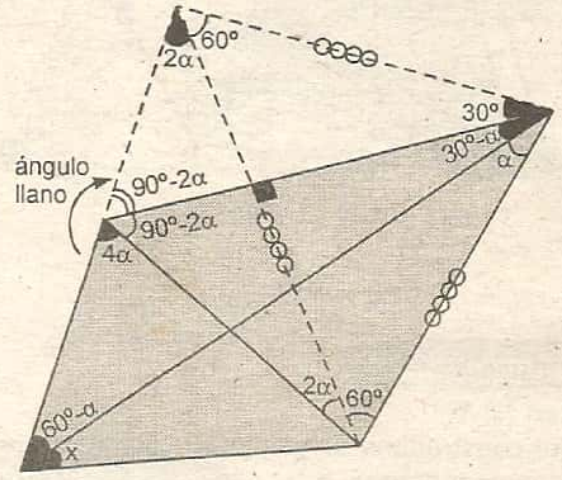
$$\therefore \quad \alpha = 15° - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{3\alpha}{2} = 15$$

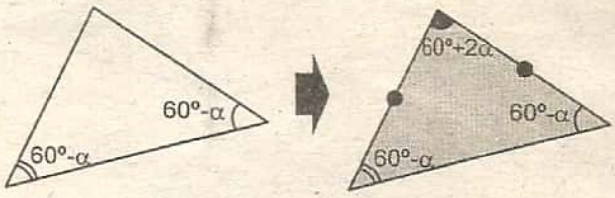
$$\alpha = 10°$$

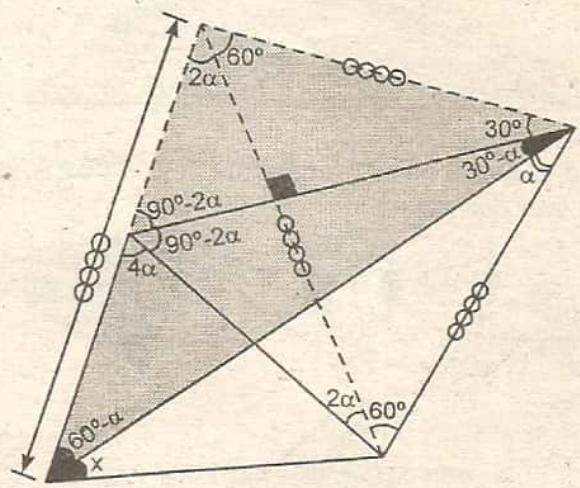
Solución Nº 27

Paso Nº 1: Construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:

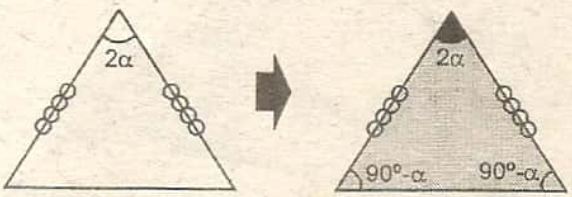


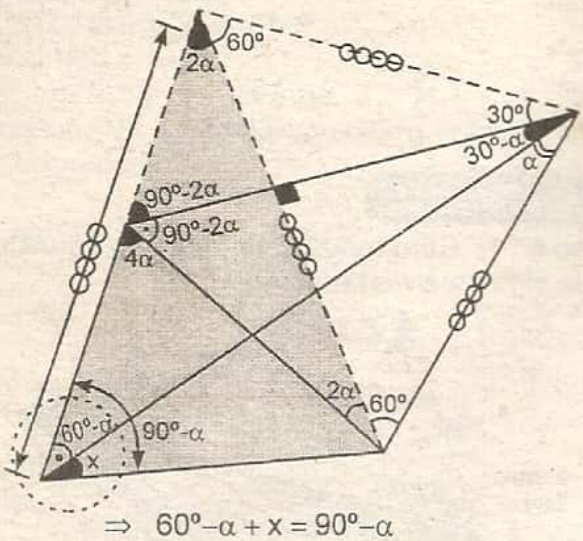
Paso Nº 2: Se observa un triángulo isósceles.





Paso Nº 3: Se tiene un triángulo isósceles.





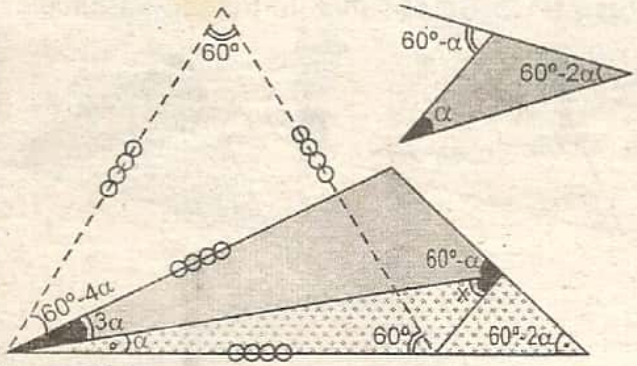
$\Rightarrow 60°-\alpha+x=90°-\alpha$

$x=30°$

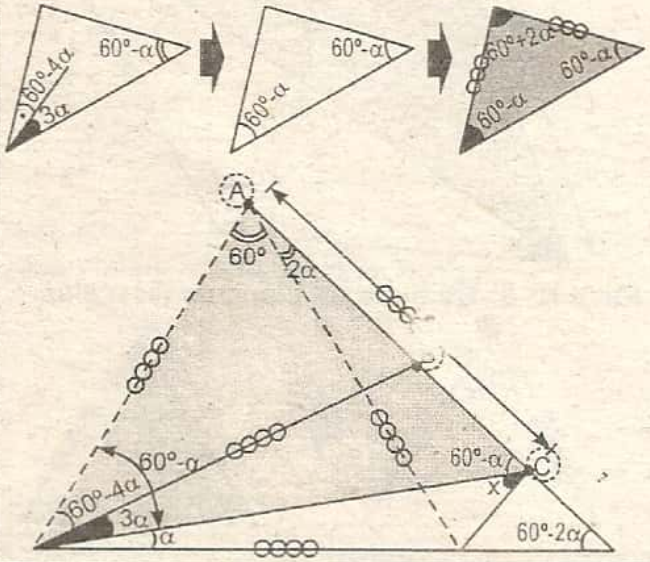
Solución Nº 28

Paso Nº 1:
Aquí construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:

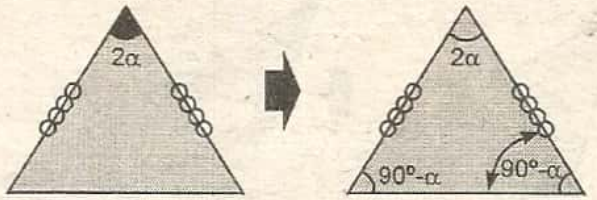
También:

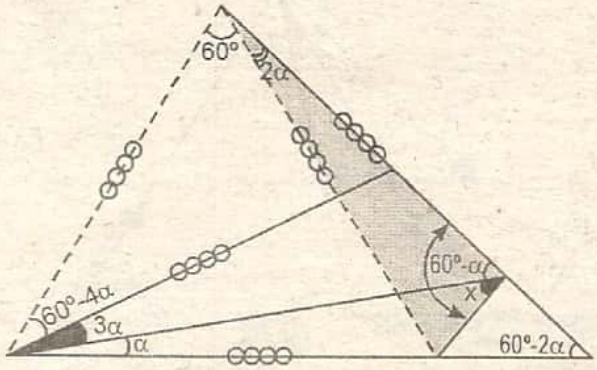


Paso Nº 2:
Se observa en el gráfico que los puntos A, B y C son colineales.



Paso Nº 3:
Ahora se observa:





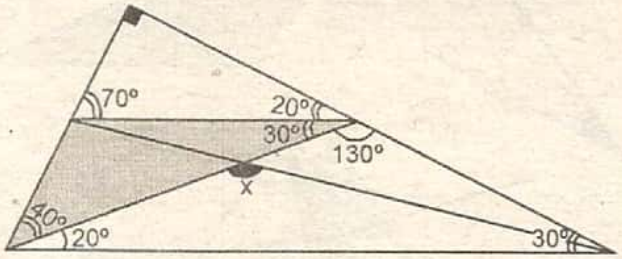
Entonces de la figura sombreada, se cumple:

$60°-\alpha+x=90°-\alpha$

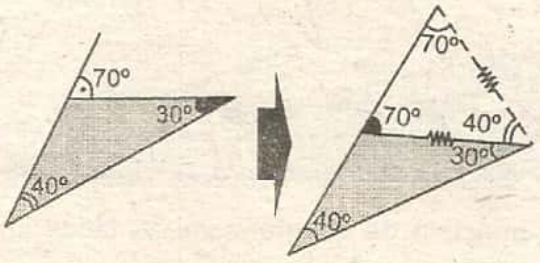
$x=30°$

Solución Nº 29

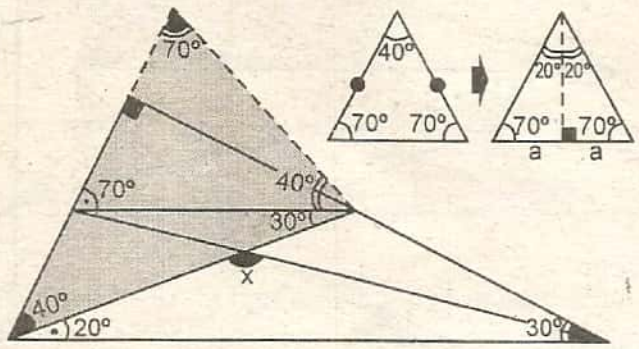
En la figura completamos los ángulos internos.



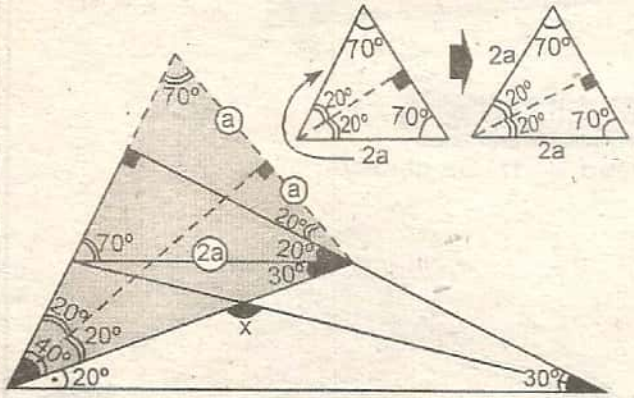
Paso Nº 1: Realizamos el siguiente trazo en la figura:



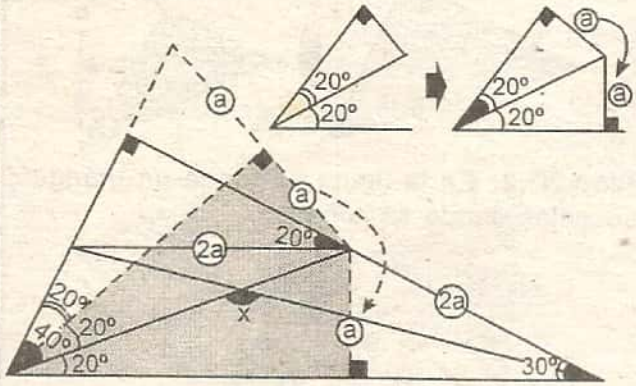
Donde se obtiene triángulos isósceles en la figura mostrada.



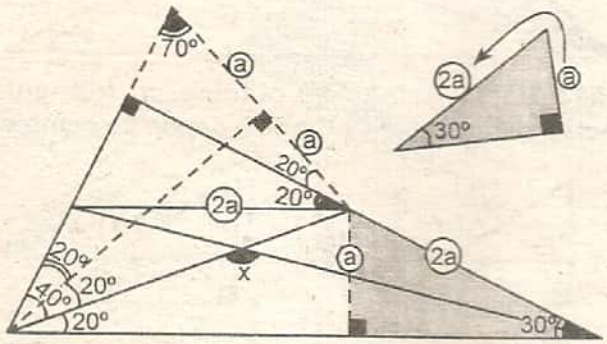
Paso N° 2: Luego se observa:



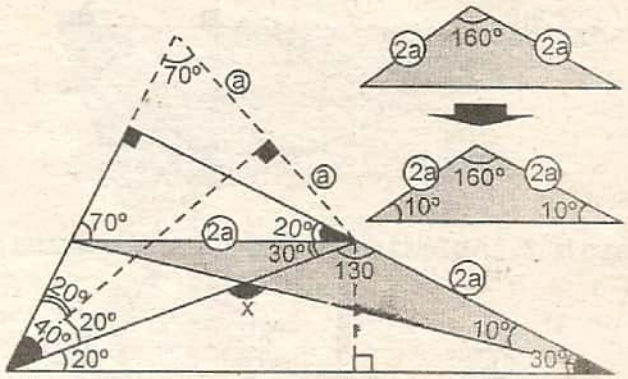
Paso N° 3: En la figura se aplica la propiedad de la bisectriz.

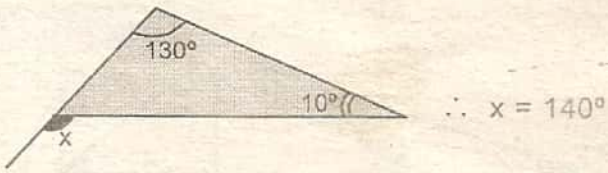


Paso N° 4: Se observa un triángulo rectángulo notable de (30° y 60°)



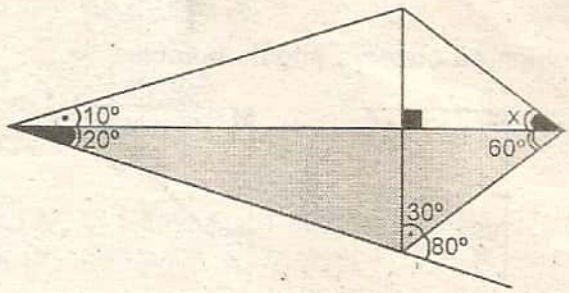
Paso N° 5: Se observa un nuevo triángulo isósceles:



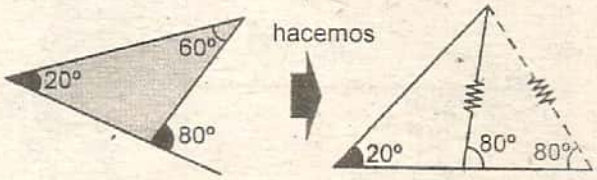


Solución N° 30

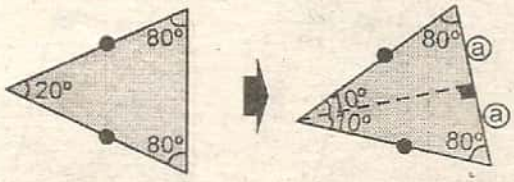
Paso N° 1:

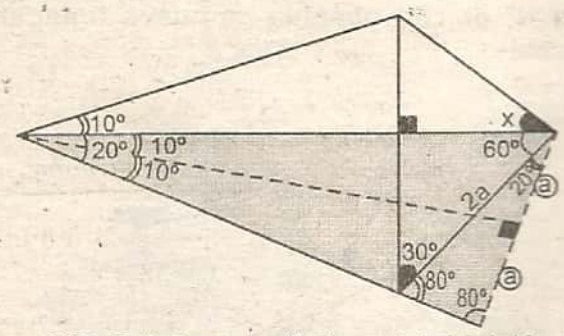


Realizamos el siguiente trazo:

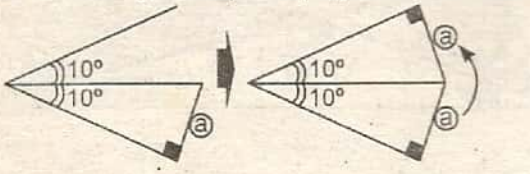


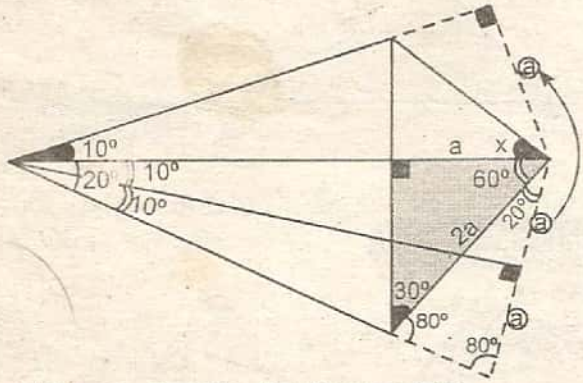
Paso N° 2:
Se obtiene un triángulo isósceles, donde se cumple:



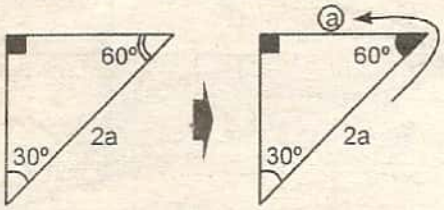


Paso N° 3: En la figura se aplica la propiedad de la bisectriz.

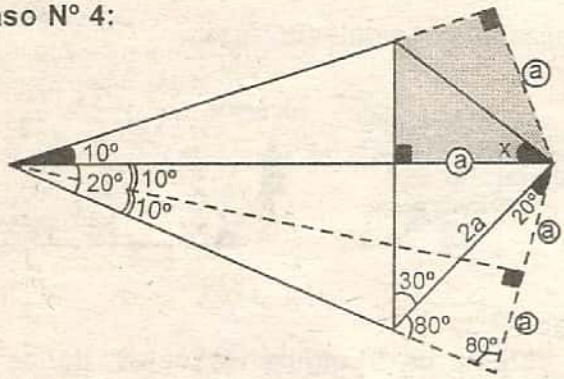




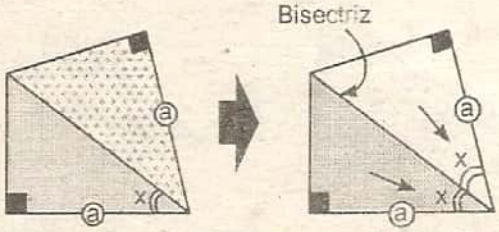
También se observa ángulo notable:



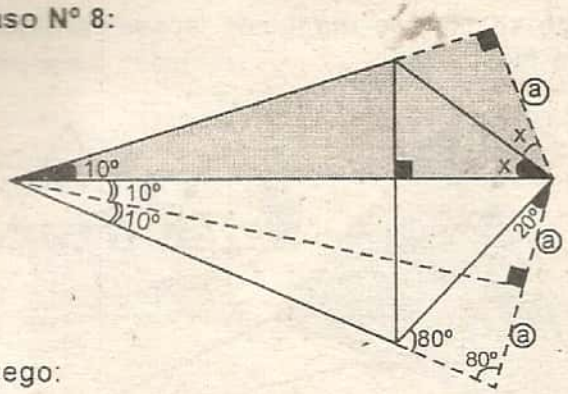
Paso N° 4:



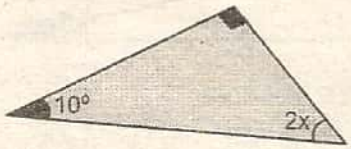
Se observa:



Paso N° 8:



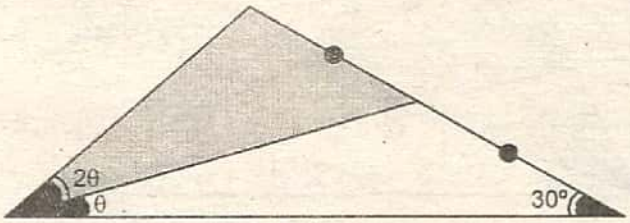
Luego:

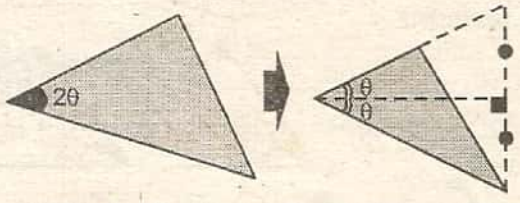


$\therefore\ 2x = 80°$
$x = 40°$

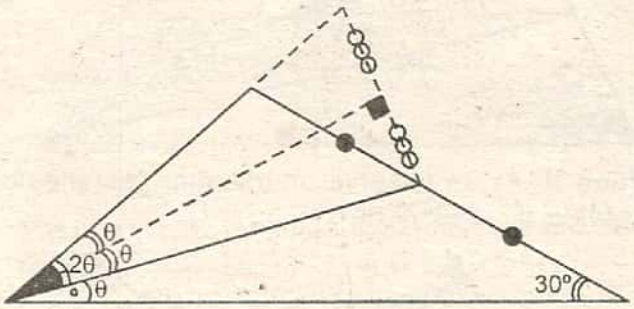
Solución N° 31

Paso N° 1: Se observa:

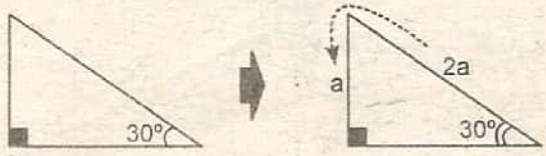


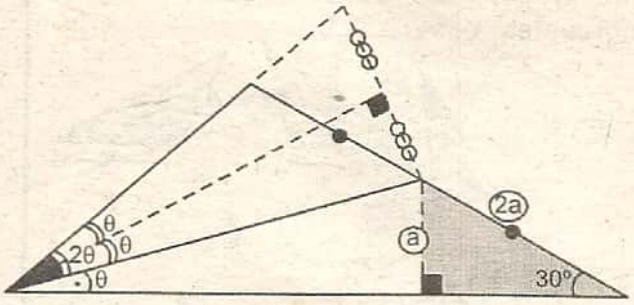


Paso N° 2: En la figura se forma un triángulo isósceles donde se cumple:

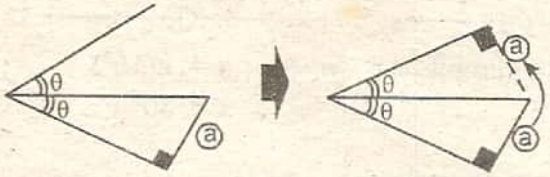


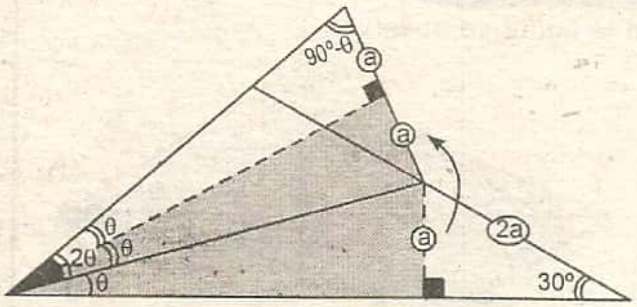
Paso N° 3: Luego se obtiene un tríangulo rectangulo notable (30° y 60°) donde se cumple:



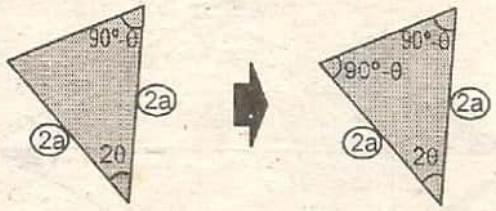


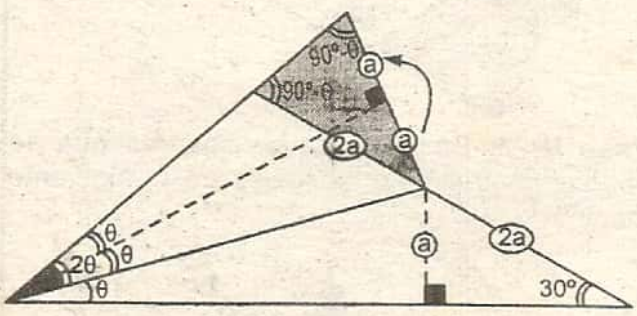
Paso Nº 4: En la figura aplicamos la propiedad de la bisectriz.



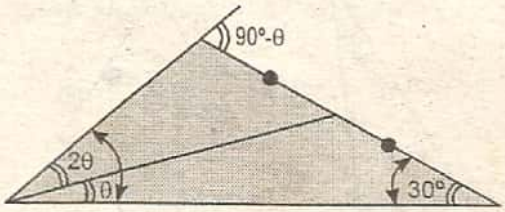


Paso Nº 5:
Se obtiene un triángulo isósceles.





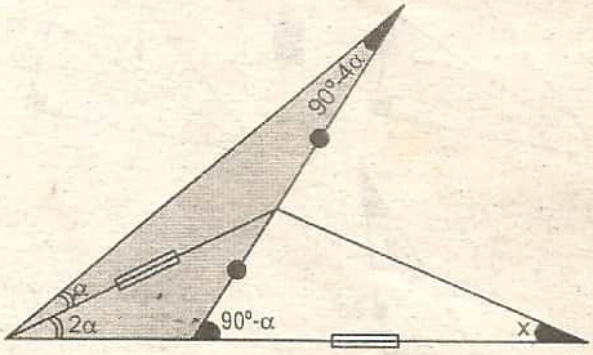
Paso Nº 6:
Por ángulo externo:



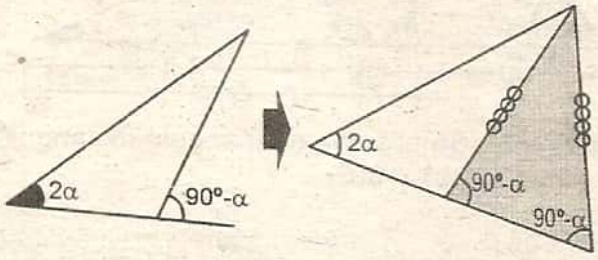
$$90°-\theta = 30° + 3\theta$$
$$60° = 4\theta$$
$$15° = \theta$$

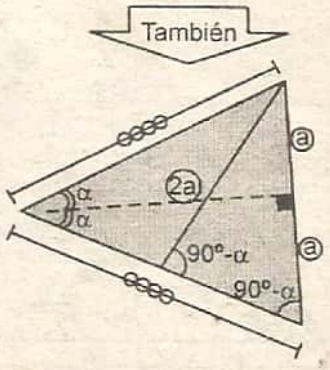
Solución Nº 32

En la figura se observa:

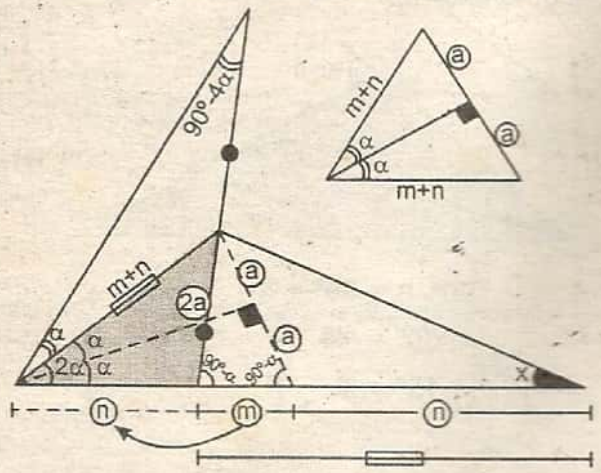


Paso Nº 1: Realizamos el siguiente trazo, para obtener triángulos isósceles.

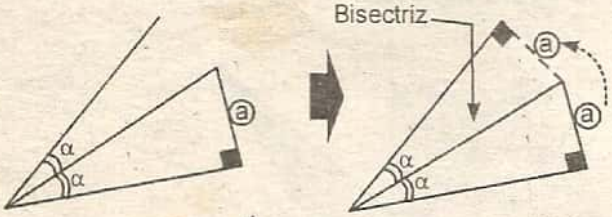


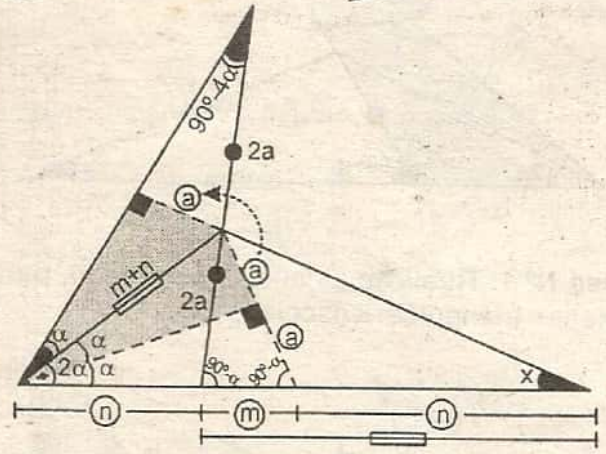


Entonces aplicamos en la figura el trazo mencionado.

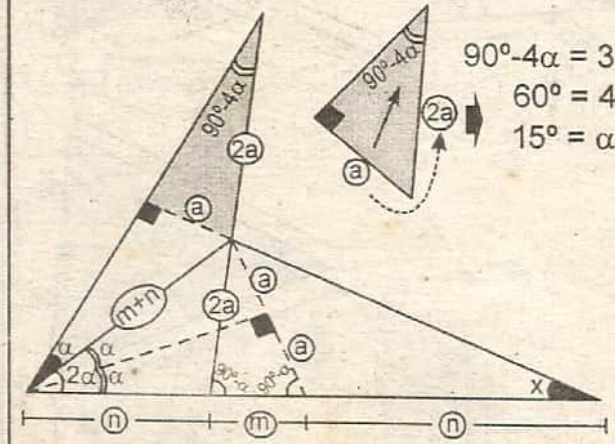


Paso N° 2: En la figura se observa la propiedad de la bisectriz donde se cumple:





Paso N° 3: Se observa un triángulo rectángulo de notable (30° y 60°)

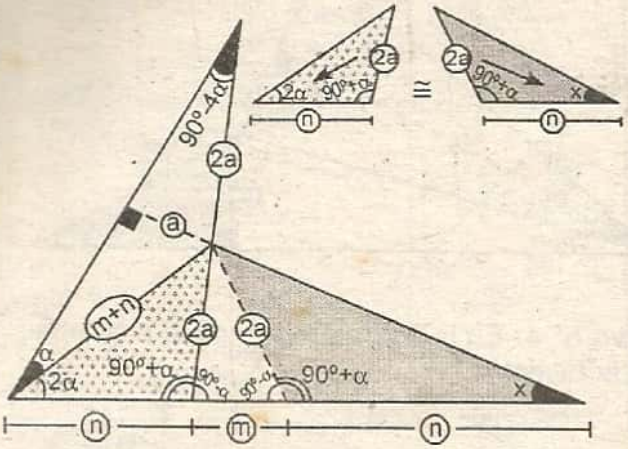


$90° - 4\alpha = 30°$

$60° = 4\alpha$

$15° = \alpha$

Paso N° 4: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)

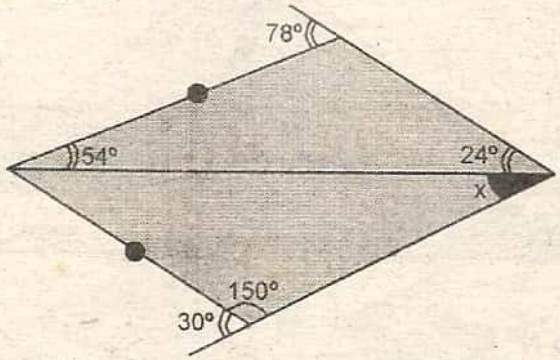


$\Rightarrow$ Se cumple $x = 2\alpha \Rightarrow x = 2(15°)$

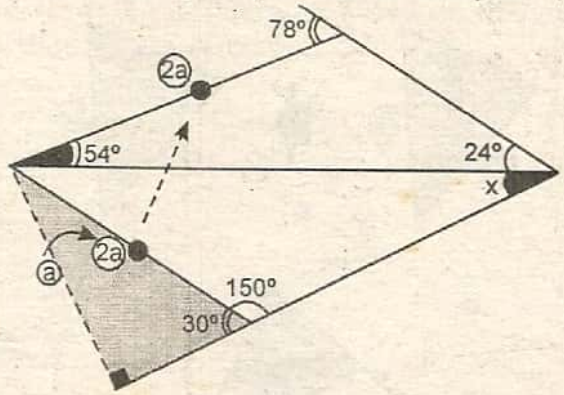
$x = 30°$

Solución N° 33

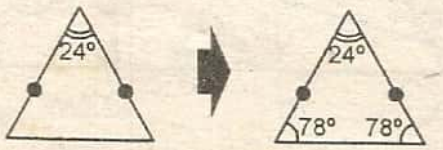
En la figura se observa:

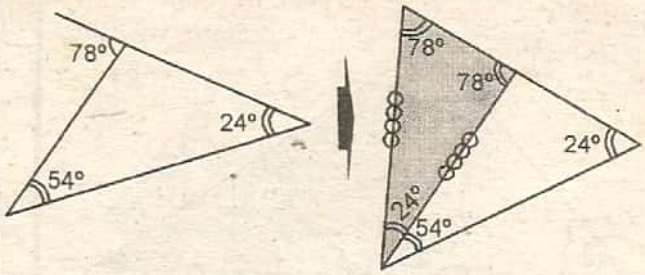


Paso N° 1: Se observa un triángulo rectángulo de notable (30° y 60°) donde se cumple:

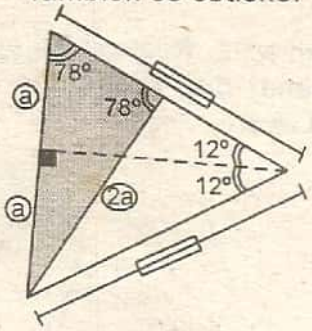


Paso N° 2: En la figura se observa que se obtiene un triángulo isósceles de la siguiente manera:

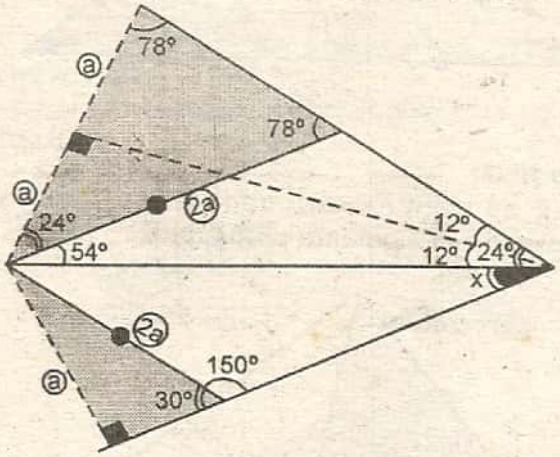




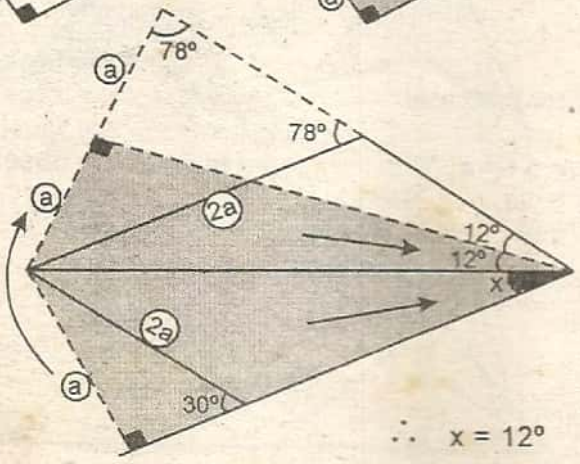
También se obtiene:



Realizando el trazo mencionado en la figura.



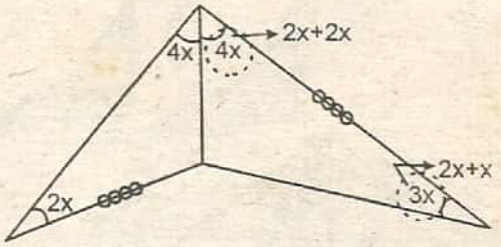
Paso Nº 3: Aplicamos el teorema de la bisectriz. (cuarto criterio de construcción)



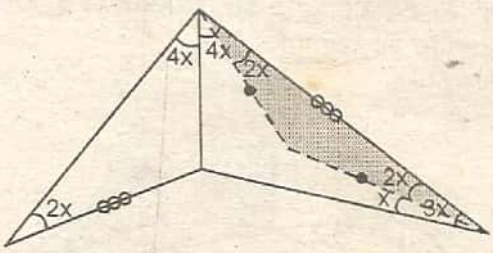
$\therefore \quad x = 12°$

Solución Nº 34

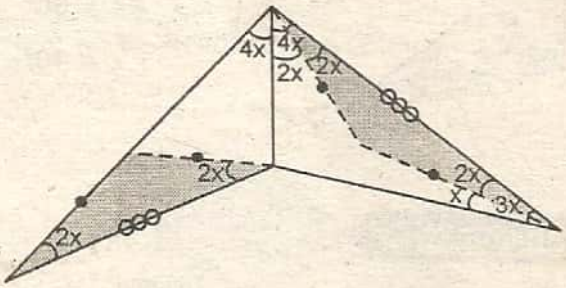
En la figura se observa los siguientes ángulos:



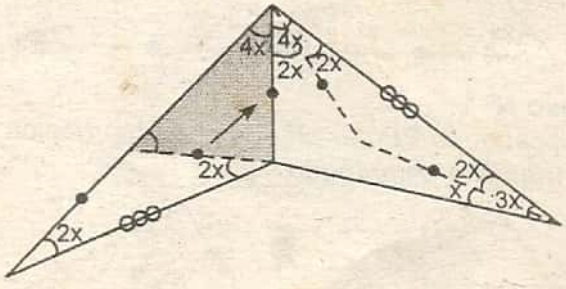
Paso Nº 1: Observando los ángulos, construimos interiormente un triángulo isósceles de la siguiente manera:



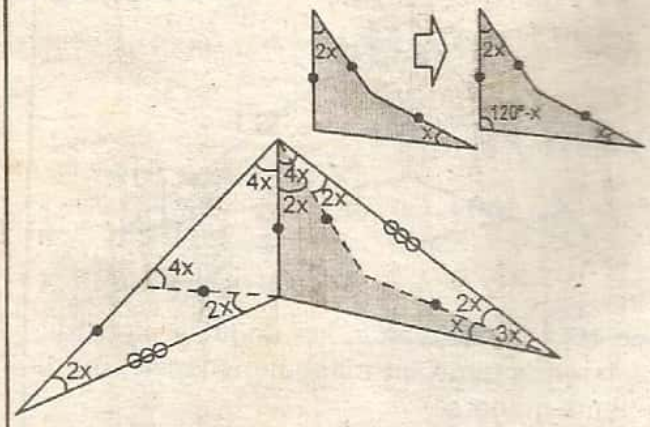
Paso Nº 2: Ahora en la figura, realizamos el siguiente trazo para obtener en la figura dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)



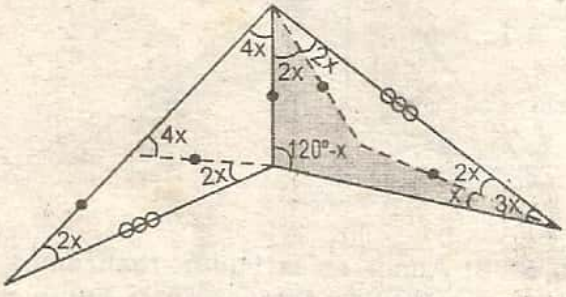
Paso Nº 3:
También se obtiene interiormente en la figura un nuevo triángulo isósceles.

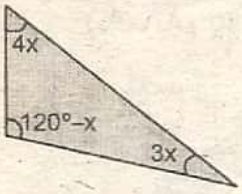


Paso N° 4: Observamos un cuadrilátero concavo donde se cumple: El septimo criterio de construcción.



Paso N° 5: Finalmente se obtiene la siguiente figura donde se cumple:



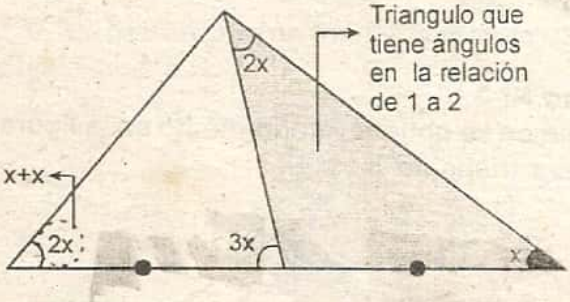


$\therefore\ 120° - x + 4x + 3x = 180°$

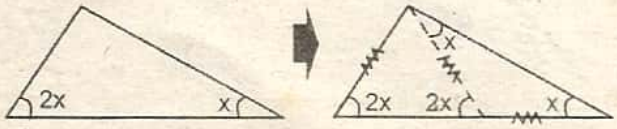
$6x = 60°$

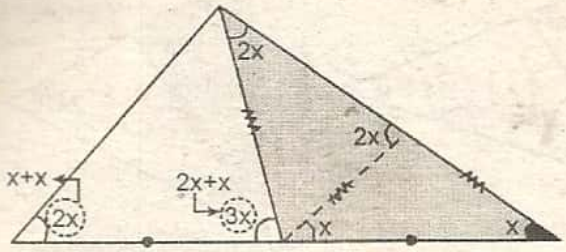
$x = 10°$

Solución N° 35

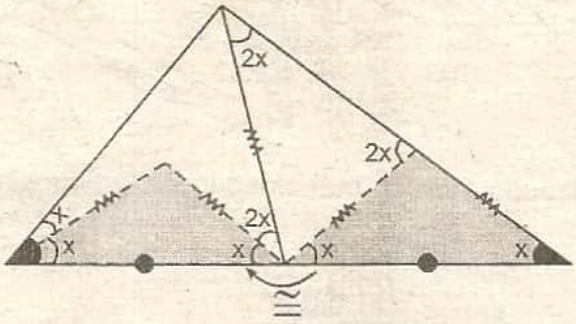


Paso N° 1:
Aplicando el Primer criterio de construcción en el triángulo sombreado

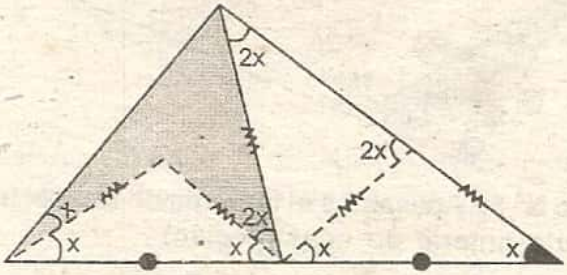


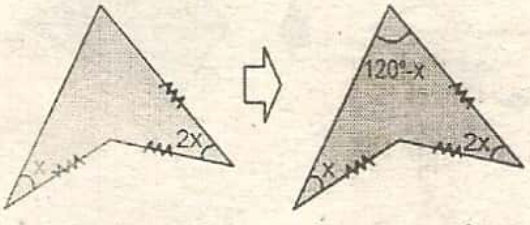


Paso N° 2: Realizamos el siguiente trazo para obtener dos triángulos congruentes, caso: (A.L.A.)

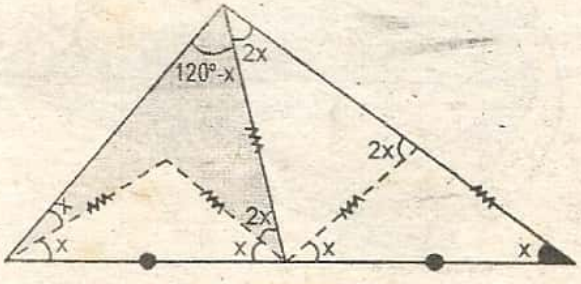


Paso N° 3:
Ahora se obtiene un cuadrilátero concavo cumpliendo la siguiente propiedad:



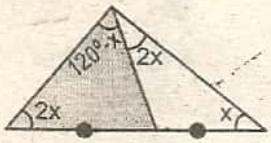


Paso N° 4: Finalmente en la figura se observa:



Donde se cumple:

$$120° - x + 2x + 2x + x = 180°$$

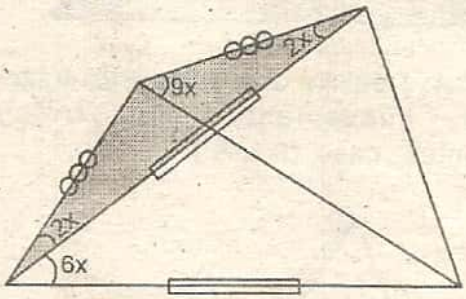


$$4x = 60°$$

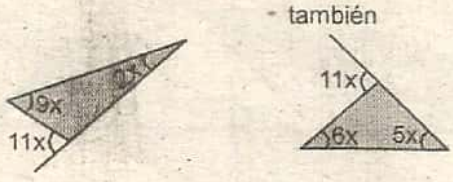
$$x = 15°$$

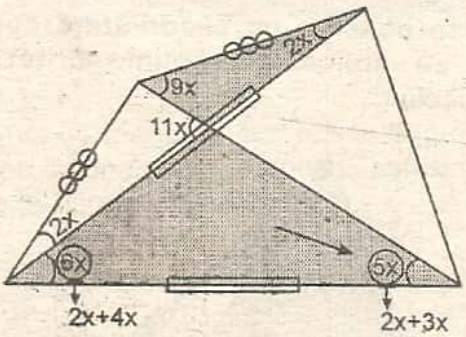
Solución Nº 36

En la figura se observa:

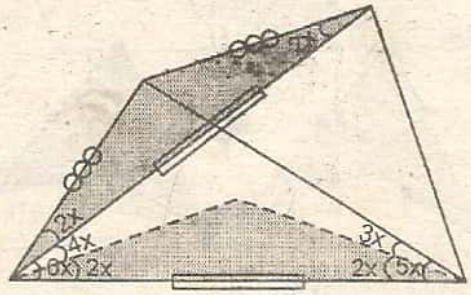


Paso Nº 1:
Se aplica la propiedad del ángulo externo en un triángulo:

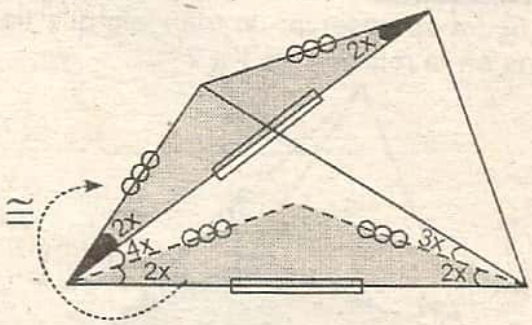




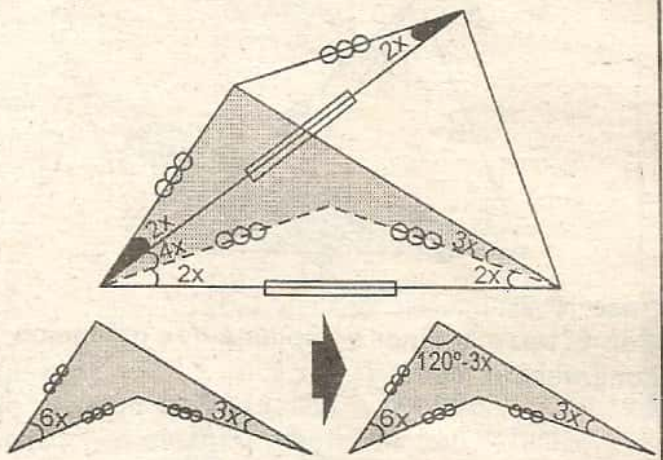
Paso Nº 2:
Realizamos el siguiente trazo, para obtener dos triángulos congruentes.



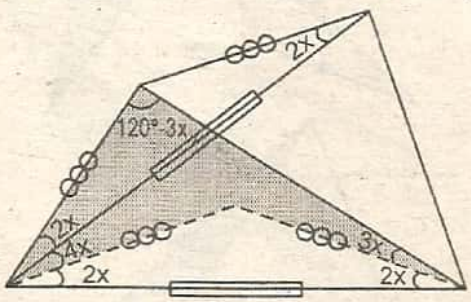
Paso Nº 3: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (A.L.A.)



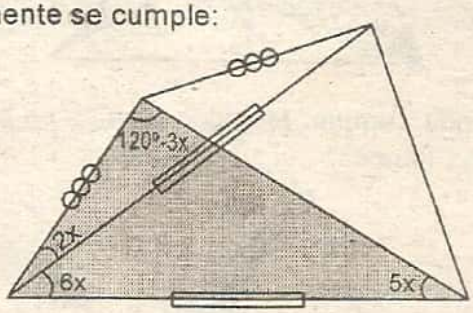
Paso Nº 4: Se observa en la figura un cuadrilátero concavo donde se cumple el septimo criterio de construcción.



Paso Nº 5: Entonces se obtiene en la figura:



Finalmente se cumple:



$$\Rightarrow \quad 120° - 3x + 8x + 5x = 180°$$

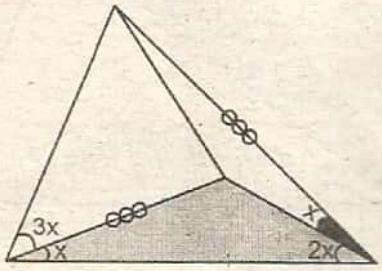
$$10x = 60°$$

$$x = 6°$$

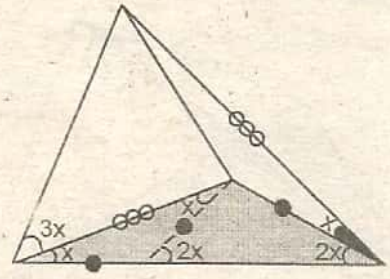
El que esculpe un monumento así mismo, tiene rocas en la cabeza (Anónimo)

Solución Nº 37

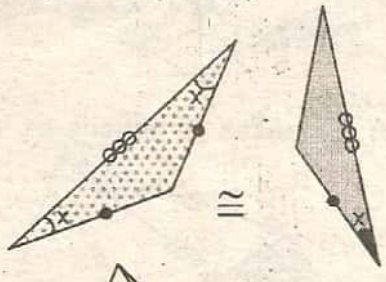
En la figura se observa: un triángulo que tiene ángulos en la relación de 1 a 2



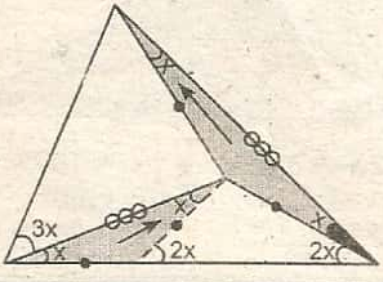
Paso Nº 1:
Aplicamos el primer criterio de construcción:



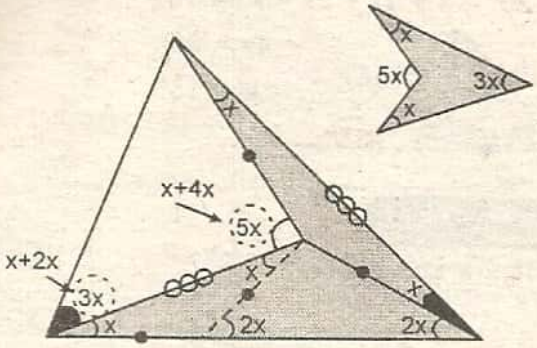
Paso Nº 2:
Con el trazo anterior se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)



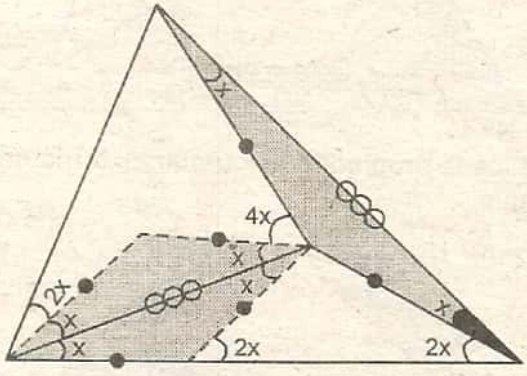
En donde cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



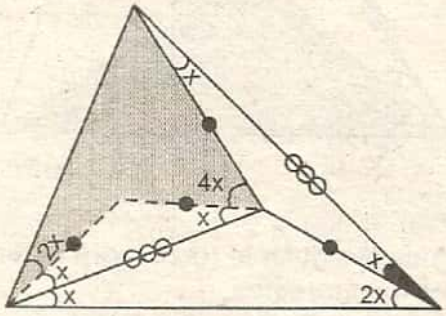
Paso Nº 3: Aplicando la siguiente propiedad:

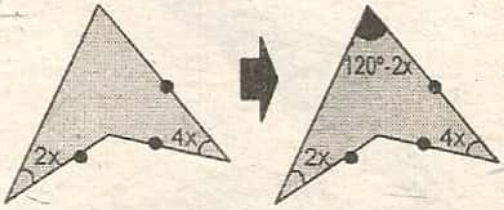


Paso Nº 4: Realizando el siguiente trazo para obtener nuevamente dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)



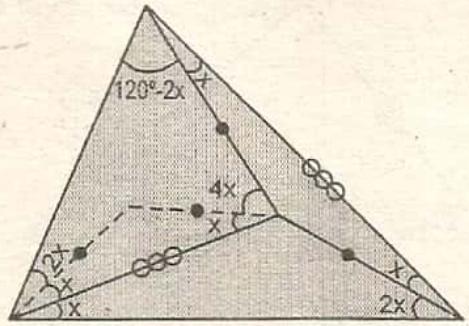
Paso Nº 5:
Ahora se observa un cuadrilátero concavo donde se aplica el séptimo criterio de construcción.





El que esculpe un monumento así mismo, tiene rocas en la cabeza (Anónimo)

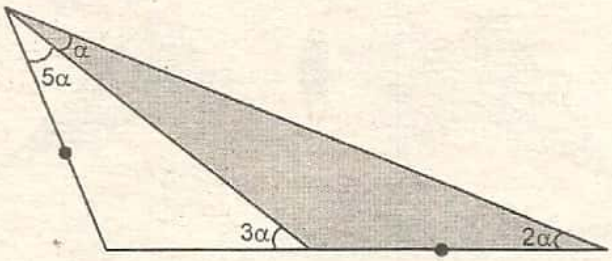
Paso Nº 6:



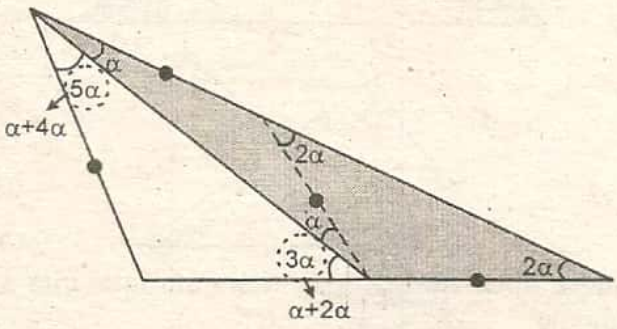
Finalmente en la figura se cumple:

$$4x + 120° - 2x + x + 3x = 180°$$
$$6x = 60°$$
$$x = 10°$$

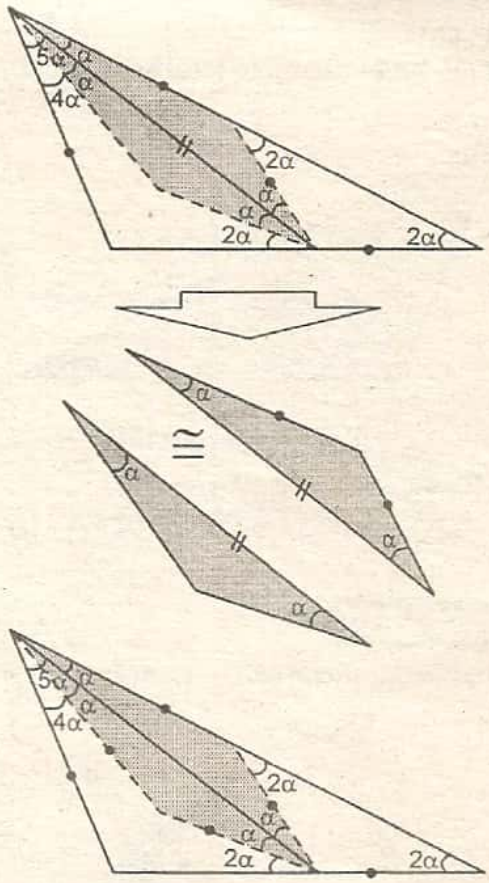
Solución Nº 38



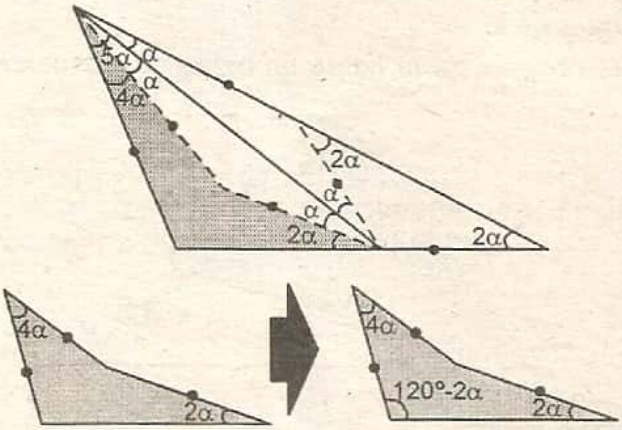
Paso Nº 1:
Se observa un triángulo que posee ángulos en la relación de uno a dos, entonces aplicamos el primer criterio de construcción:



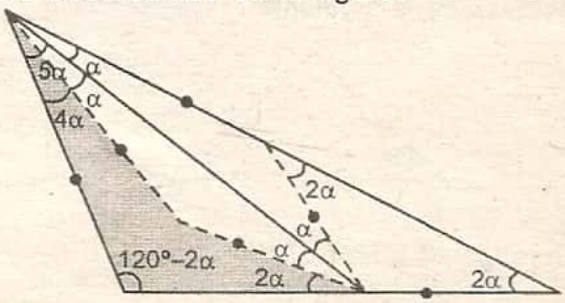
Paso Nº 2:
En la figura se obtienen dos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo, caso: (A.L.A.)



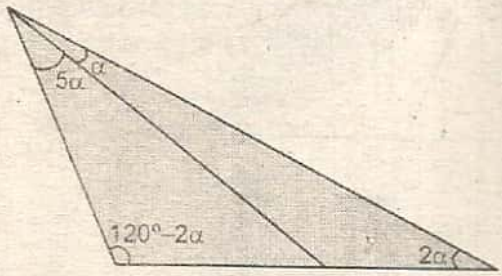
Paso Nº 3:
Se observa un cuadrilátero concavo donde se aplicará el séptimo criterio de construcción.



Paso Nº 4:
Ahora observamos en la figura:



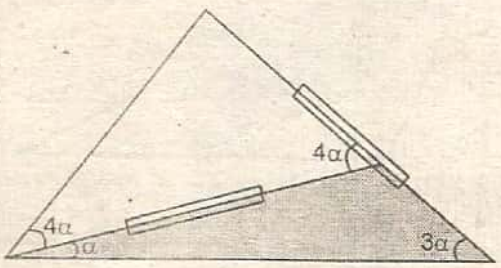
Paso N° 5:
Finalmente en el triángulo total se cumple:



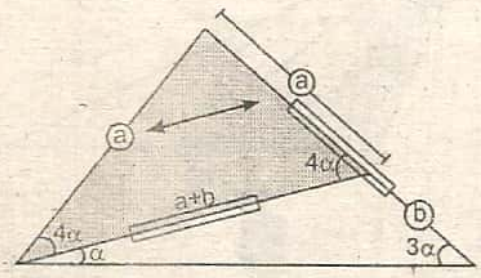
$$120°-2\alpha+5\alpha+\alpha+2\alpha = 180°$$
$$6\alpha = 60°$$
$$\alpha = 10°$$

Solución N° 39

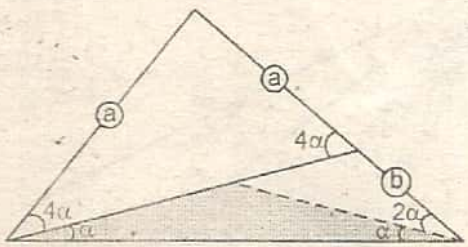
En la figura se observa:



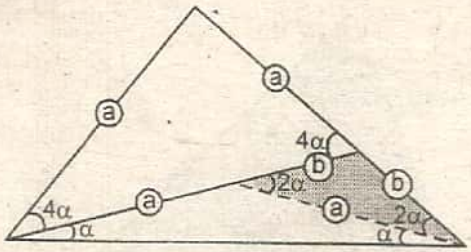
Paso N° 1:
Se observa de la figura un triángulo isósceles.



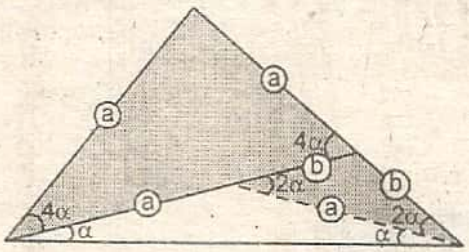
Paso N° 2:
Ahora realizamos el siguiente trazo para obtener lados iguales y así generar triángulos isósceles de la siguiente manera.

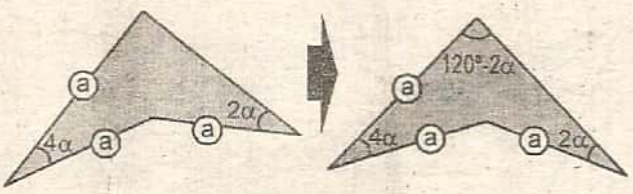


Luego se obtiene:

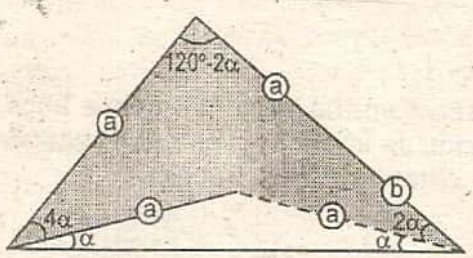


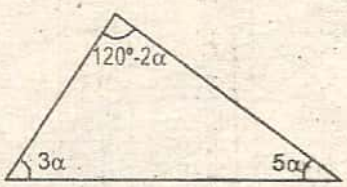
Paso N° 3:
Ahora se observa en la figura un cuadrilátero concavo donde se aplica el séptimo criterio de construcción.





Paso N° 4:



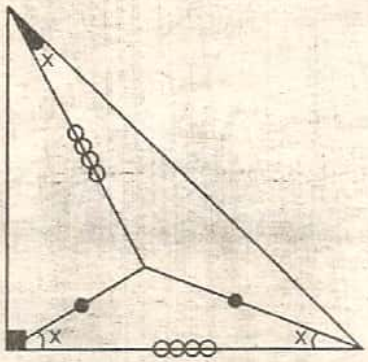


Ahora observamos en el triángulo total que se cumple:

$$3\alpha+120°-2\alpha+5\alpha = 180°$$
$$6\alpha = 60°$$
$$\alpha = 10°$$

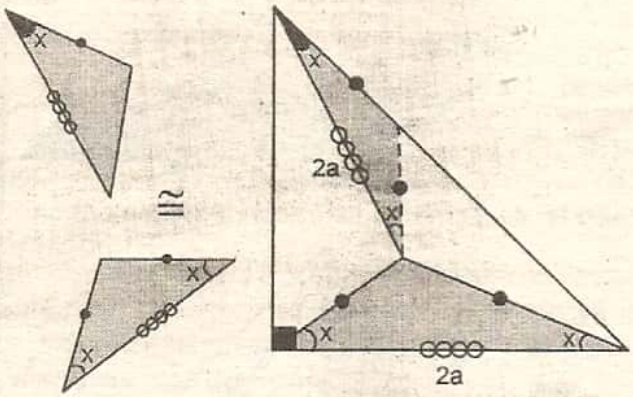
Solución Nº40

De la figura se observa:



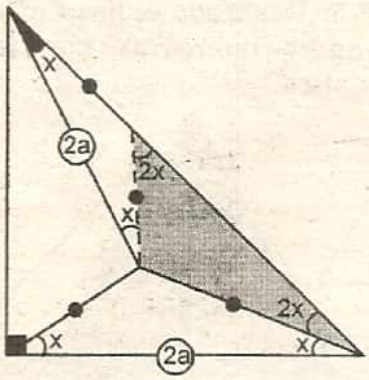
Paso Nº 1:

Realizando el siguiente trazo para obtener dos triángulos congruentes de la siguiente manera. Caso (L.A.L.)



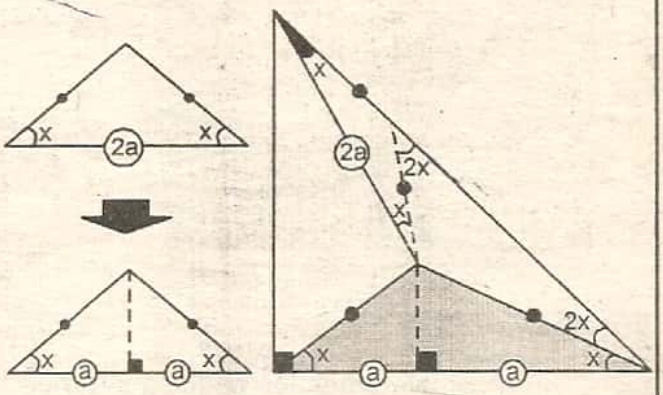
Paso Nº 2:

Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:



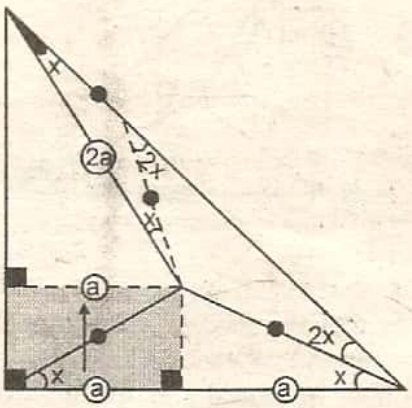
Paso Nº 3:

Se observa en el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:



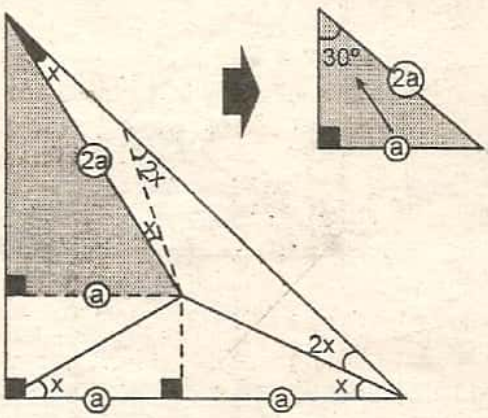
Paso Nº 4:

Ahora hacemos el siguiente trazo.

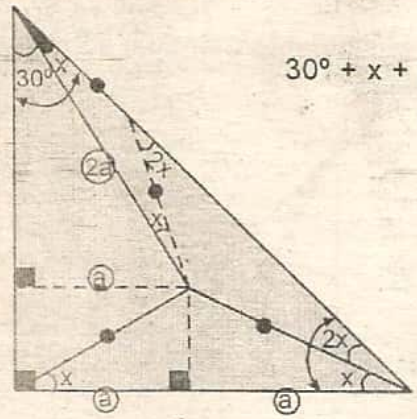


Paso Nº 5:

Con el trazo anterior se obtiene un triángulo rectángulo notable de (30º y 60º)



De la figura total se obtiene:



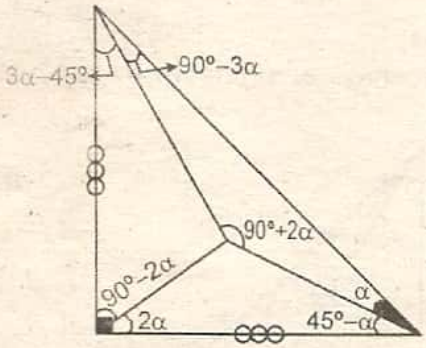
$30° + x + 3x = 90°$

$4x = 60°$

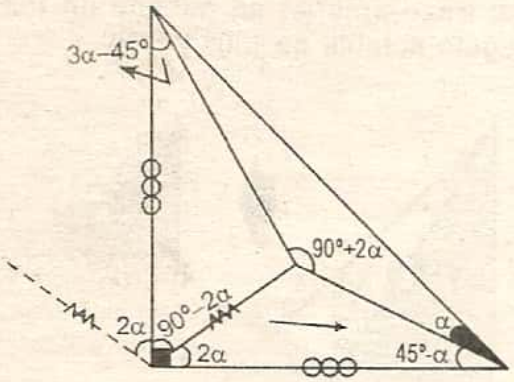
$x = 15°$

Solución Nº41

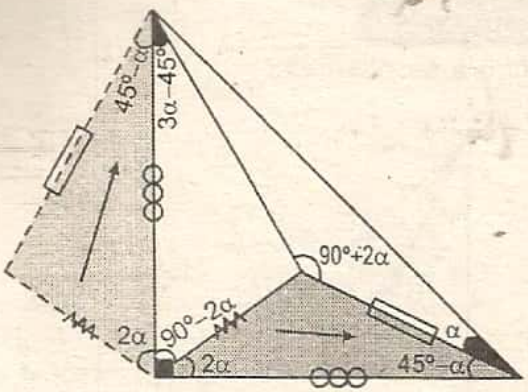
En la figura completamos los ángulos internos.



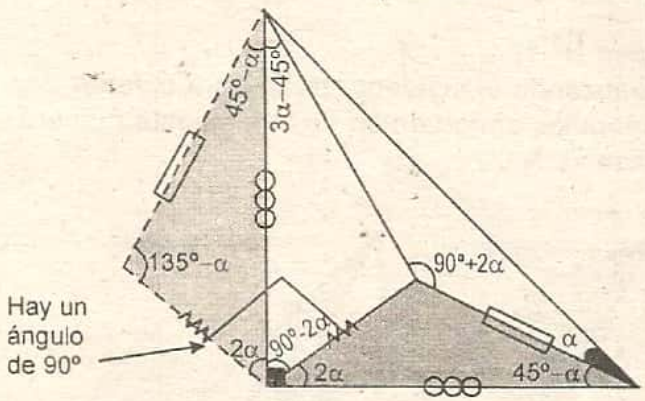
Paso Nº 1: Observamos que tenemos dos lados iguales, entonces tratemos de buscar triángulos congruentes, aplicando el quinto criterio de construcción.



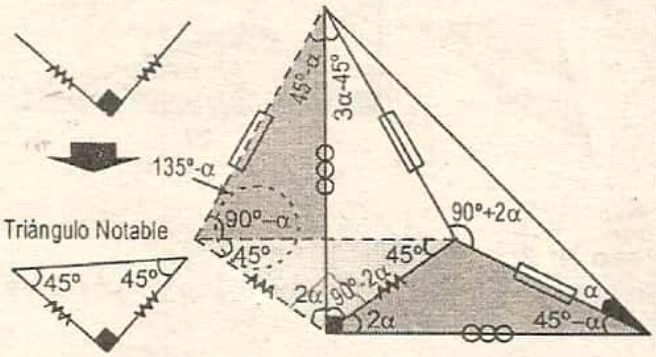
Paso Nº 2:
Con el trazo anterior se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



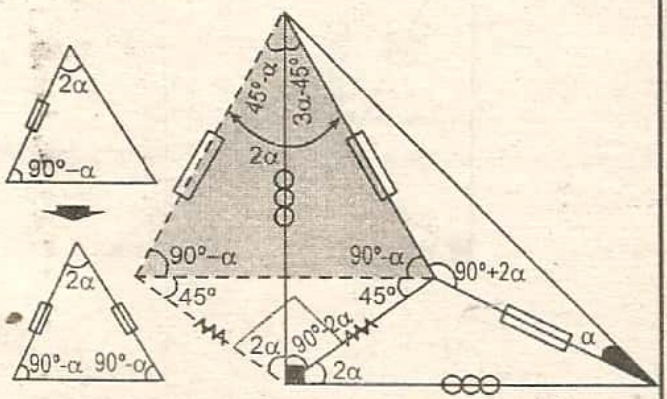
Paso Nº 3:
Ahora observamos en la figura que se cumple:



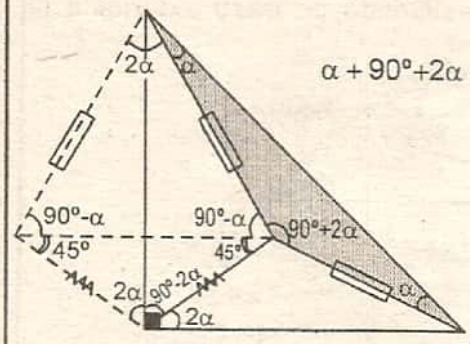
Paso Nº 4: También se observa que se obtiene:



Paso Nº 5: Realizado el paso anterior obtiene un triángulo isósceles con la siguiente característica.



Paso Nº 6: Finalmente un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



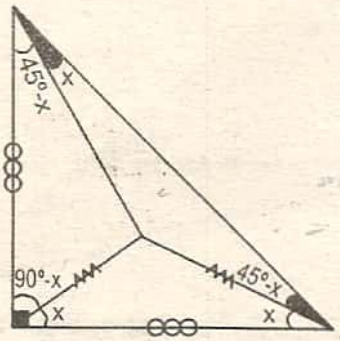
$$\alpha + 90° + 2\alpha + \alpha = 180°$$

$$4\alpha = 90°$$

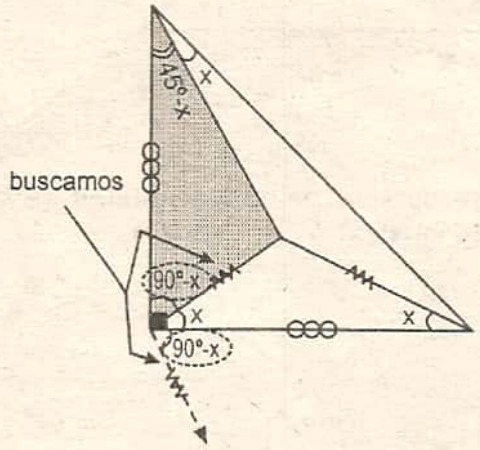
$$\alpha = 22°30'$$

Solución Nº 42

En la figura completamos los ángulos internos

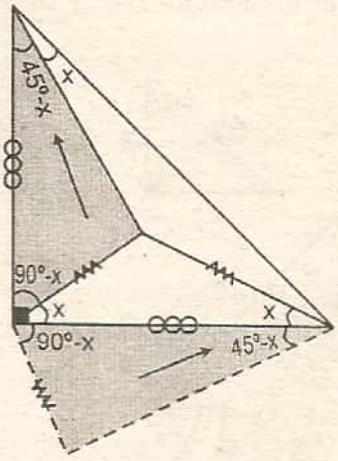


Paso Nº 1:
Se observa que se tiene dos lados iguales, entonces buscaremos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo aplicando el quinto criterio de construcción.

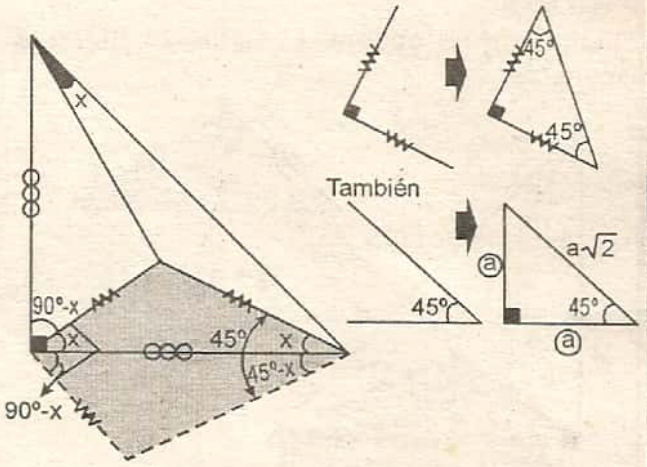


Paso Nº 2: Con el trazo anterior se observa que se ha obtenido dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)

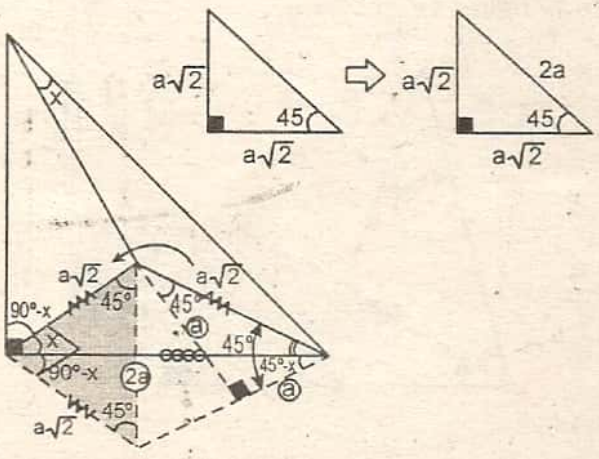
* Realizado el paso anterior, en la figura se obtiene:



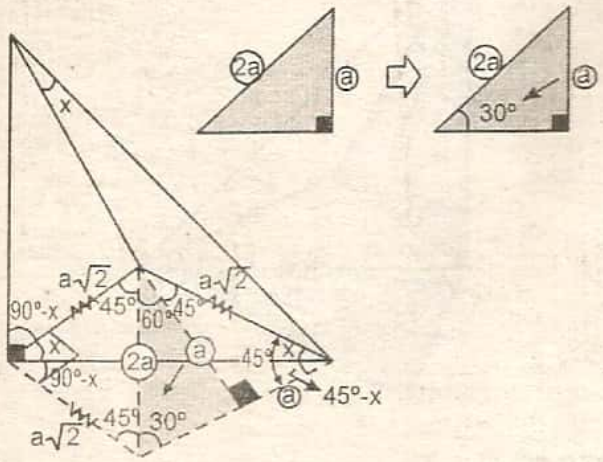
Paso Nº 3:
Ahora se observa en la figura que tenemos los siguientes ángulos:



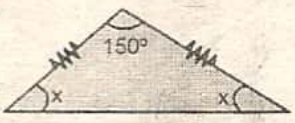
Paso Nº 4:
Con dichos ángulos encontrados formamos triángulos rectángulos notables de 45° de la siguiente manera:



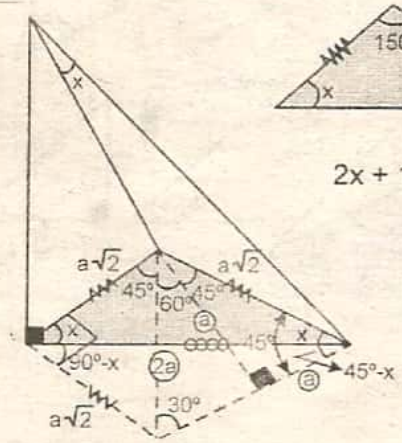
Paso N° 5:
Ahora en la figura se observa que se obtiene otro triángulo notable de (30° y 60°)



Paso N° 6:
Finalmente se obtiene el siguiente triángulo isósceles.

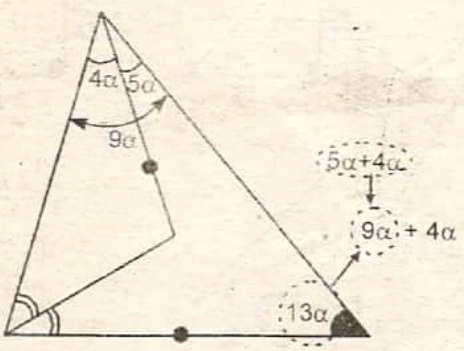


$$2x + 150° = 180°$$
$$2x = 30°$$
$$x = 15°$$

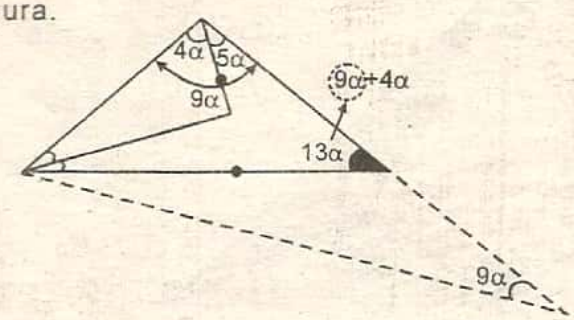


Solución N°43

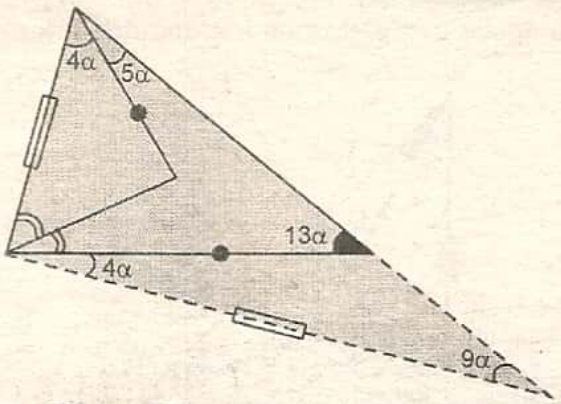
En la figura se observa:



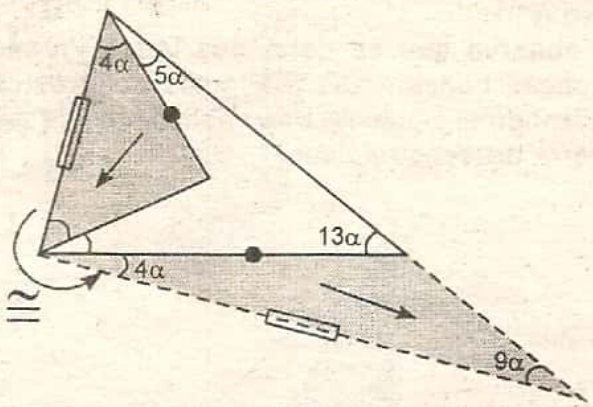
Paso N° 1: Observamos que se tiene dos lados iguales, entonces tratemos de buscar triángulos congruentes realizando un trazo exterior a la figura.



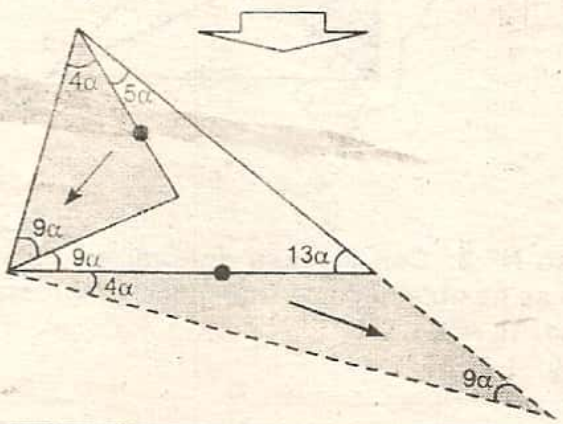
Buscando un triangulo isósceles para encontrar triángulos congruentes.



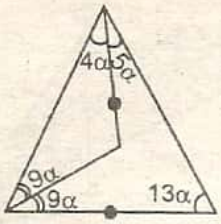
Paso N° 2: Se obtienen dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)



Aqui se cumple: "A lados iguales se opone angulos iguales"



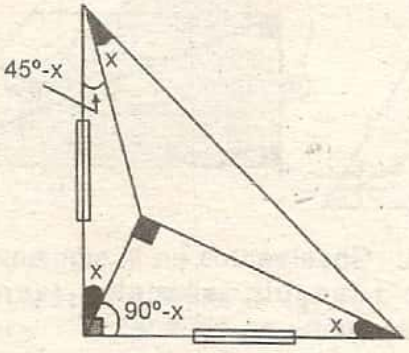
Paso Nº 3:
Luego en el triángulo inicial, tenemos:



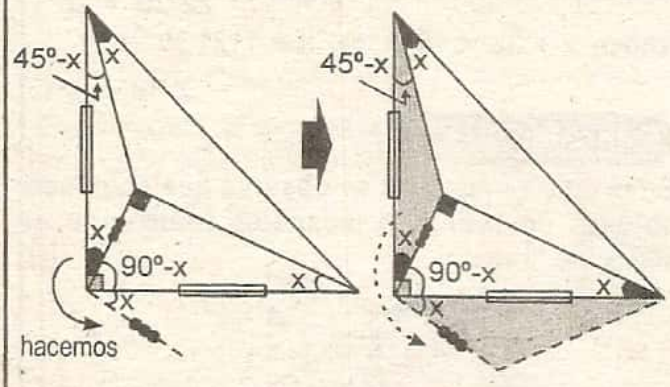
$$18\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 13\alpha = 180^\circ$$
$$40\alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = 4^\circ\ 30'$$

Solución Nº 44

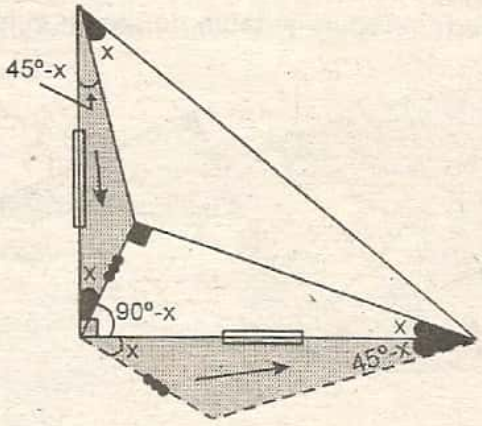
En la figura se observa



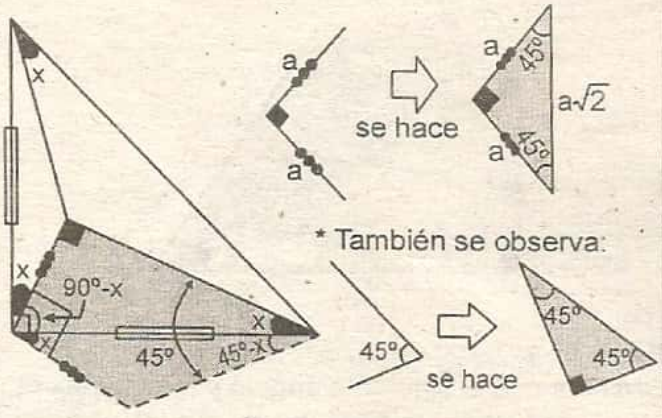
Paso Nº 1:
Observamos que tenemos dos lados iguales entonces buscaremos triángulos congruentes aplicando el quinto criterio de construcción, de la siguiente manera:



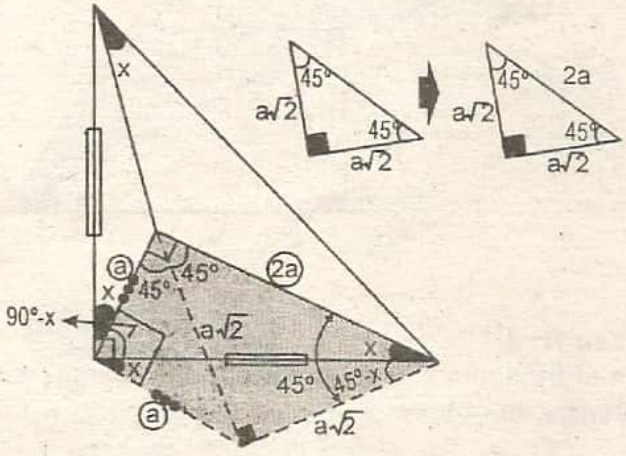
Paso Nº 2: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.), donde se cumple:



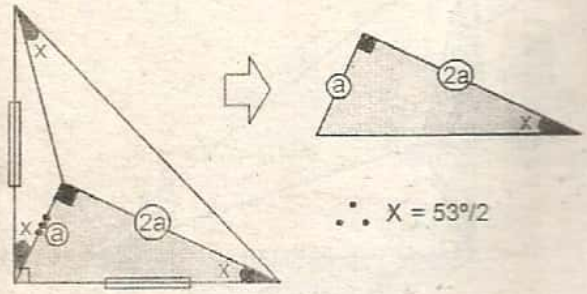
Paso Nº 3:
Observamos que en la figura se tiene los siguientes ángulos:



Paso Nº 4:
Con dichos ángulos encontrados formamos triángulos rectángulos notables (ver figura):



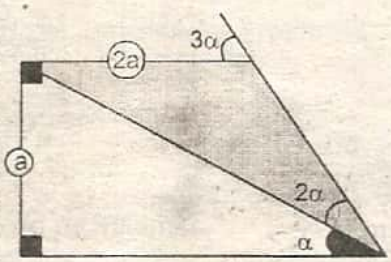
Paso Nº 5:
En la figura se observa que se obtiene un nuevo triángulo rectángulo notable donde se cumple:



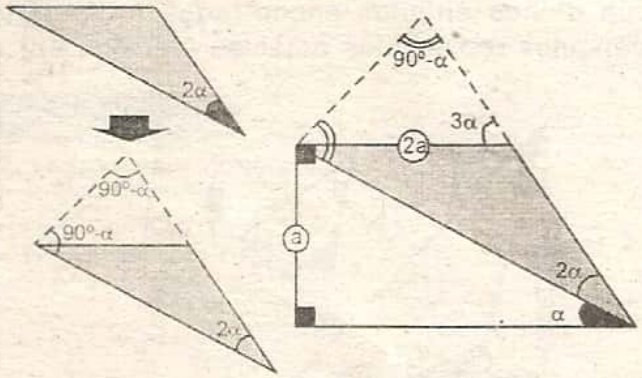
$\therefore$ X = 53º/2

Solución Nº45

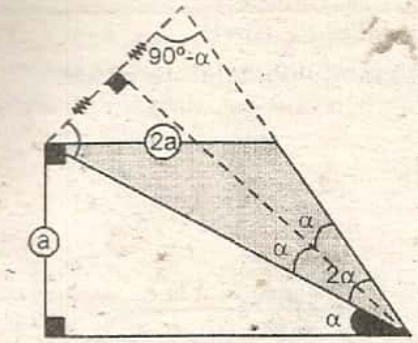
En la figura se observa que podemos aplicar el "Cuarto criterio de construcción" de la siguiente manera.



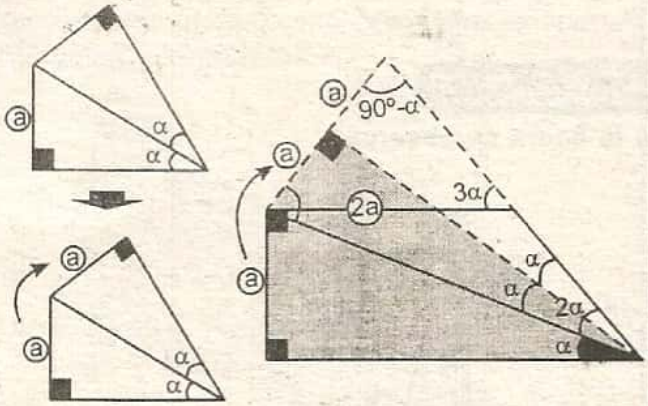
Paso Nº 1:
Observamos el siguiente ángulo y realizamos el siguiente trazo: Formando un triángulo isósceles.



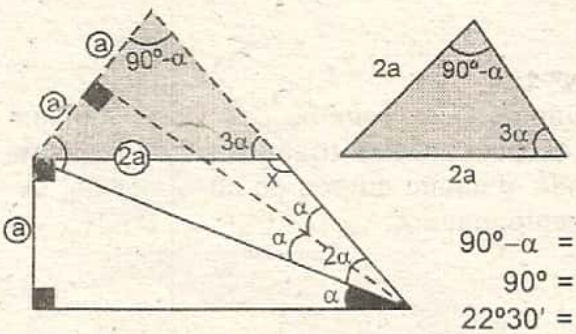
Paso Nº 2:
En el triángulo isósceles formado, trazamos su altura y se obtiene:



Paso Nº 3: En la figura se observa la propiedad de la bisectriz.



Paso Nº 4: Observamos en la siguiente figura un nuevo triángulo isósceles (ver figura sombreada) donde se obtiene:

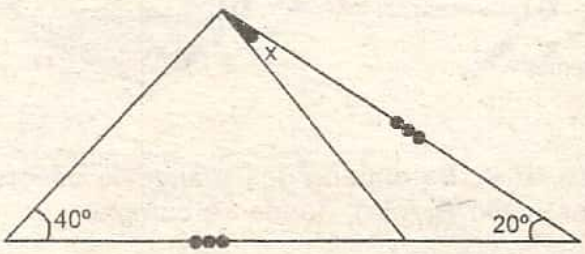


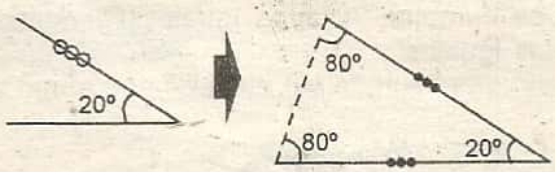
$90° - \alpha = 3\alpha$
$90° = 4\alpha$
$22°30' = \alpha$

Ahora: $x + 3\alpha = 180° \Rightarrow x = 112° 30'$

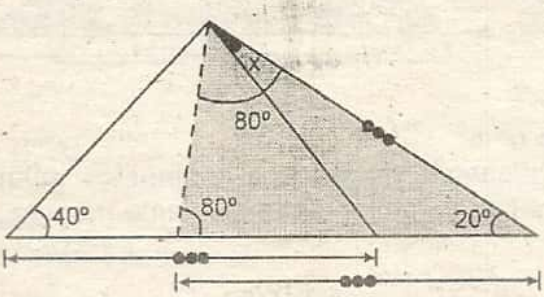
Solución Nº46

En la figura mostrada se observa que se puede obtener un triángulo isósceles realizando el siguiente trazo:

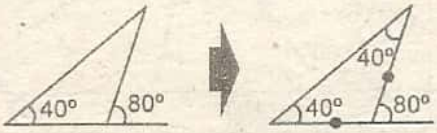




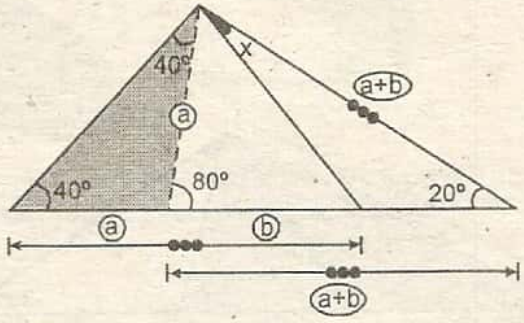
Paso N° 1:
Entonces realizamos el trazo mencionado para generar triángulos isósceles.



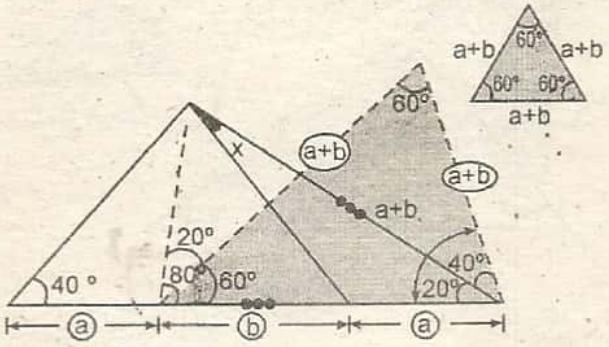
También se observa:



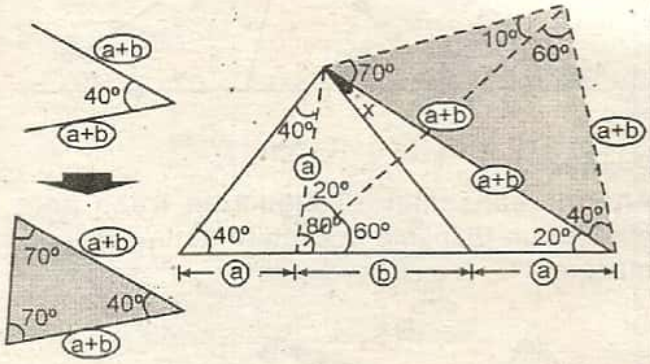
Paso N° 2:
Identificamos los lados iguales colocando variables:



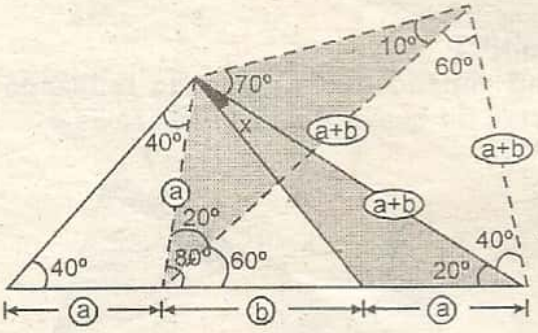
Paso N° 3:
Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo equilátero de la siguiente manera:



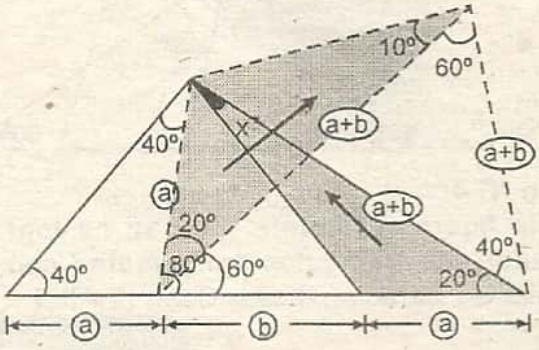
Paso N° 4:
Como consecuencia del trazo anterior realizado, se observa un nuevo triángulo isósceles.



Paso N° 5: También se ha logrado obtener dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.) en las siguientes posiciones.



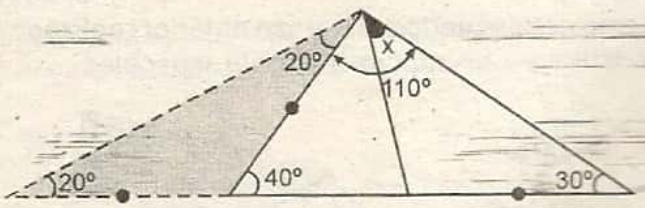
Donde se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



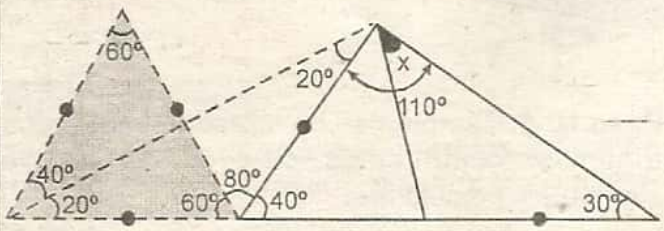
$\therefore\ x = 10°$

Solución N° 47

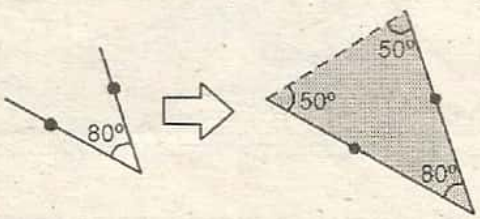
Paso N° 1:
De la figura realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.

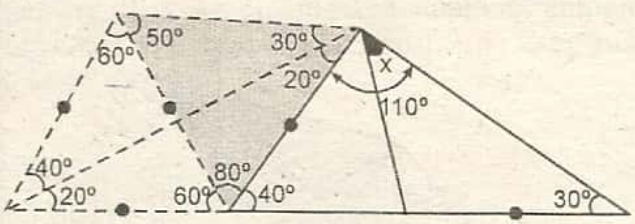


Paso N° 2:
Ahora, realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo equilátero de la siguiente manera.

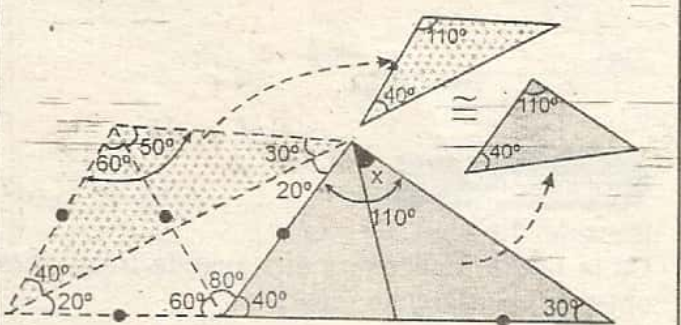


Paso N° 3:
Como consecuencia del trazo realizado se observa un nuevo triángulo isósceles.

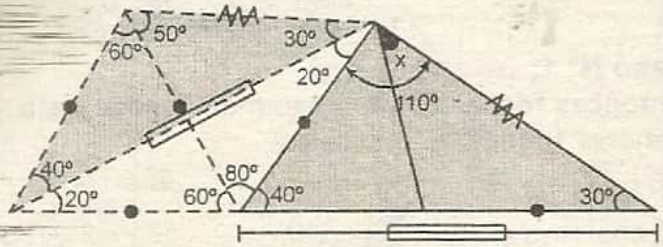




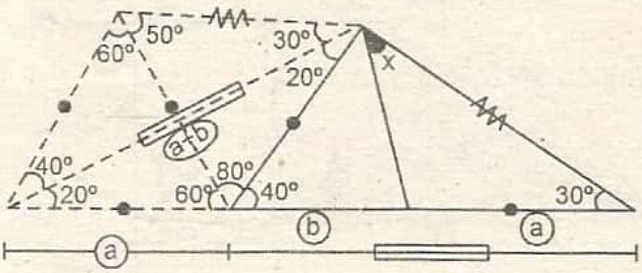
Paso N° 4:
De la figura resultante total se ha logrado obtener dos triángulos congruentes con las siguientes características. Caso (L.A.L.)



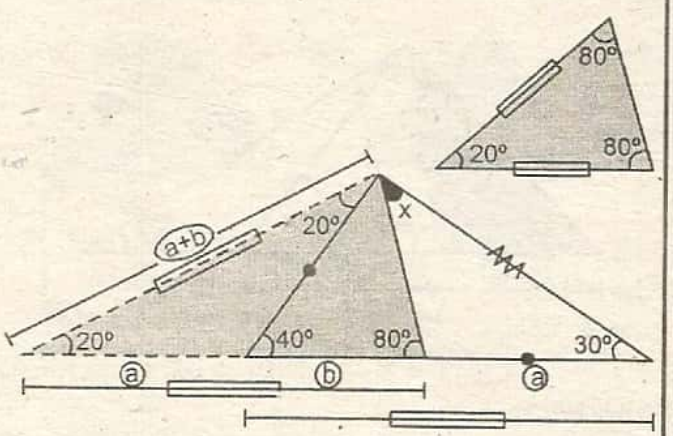
Aqui se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



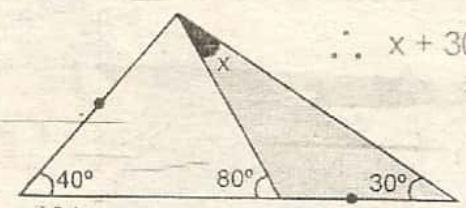
Paso N° 5:
Identificamos los lados o segmentos iguales colocando variables de la siguiente manera.



De la figura se logra obtener un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



De aquí, se obtiene:

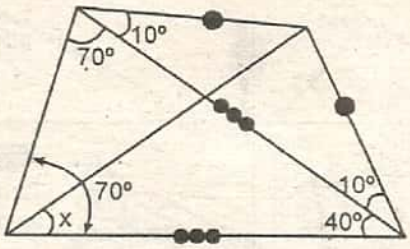


$\therefore\ x + 30° = 80°$

$x = 50°$

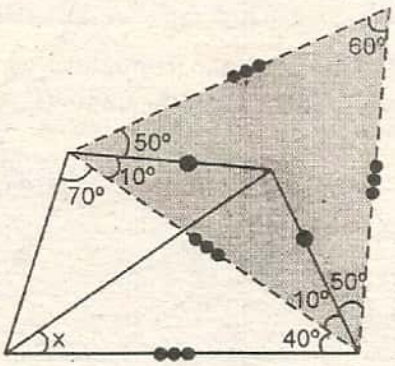
Solución Nº 48

En la figura se completa los ángulos internos:

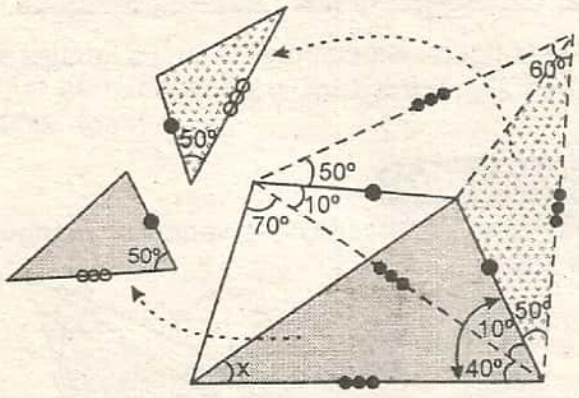


Paso Nº 1:
Como se observa lados iguales entonces buscaremos triángulos congruentes; realizando el siguiente trazo.

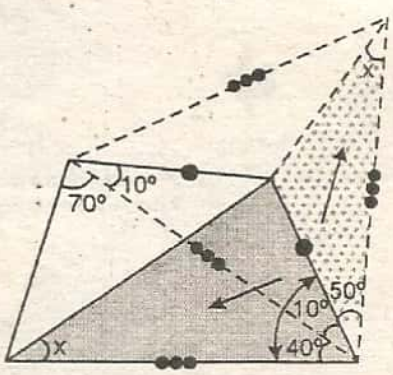
Trazamos un triángulo equilátero (Por que tiene tres lados y ángulos iguales)



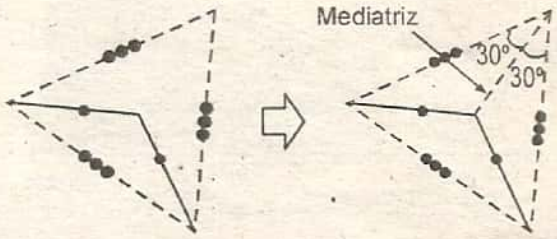
Paso Nº 2: Se obtiene dos triángulos congruentes; caso(L.A.L.)

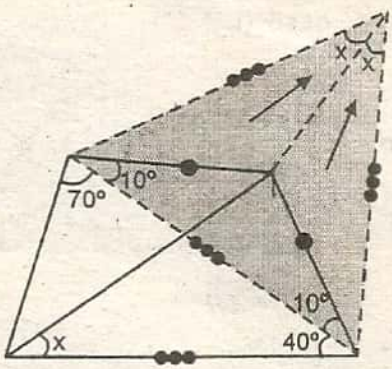


Donde se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



Paso Nº 3:
En el triángulo equilátero formado, se cumple:

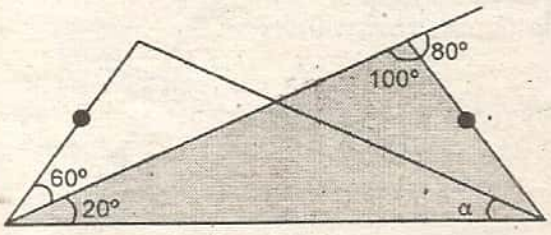




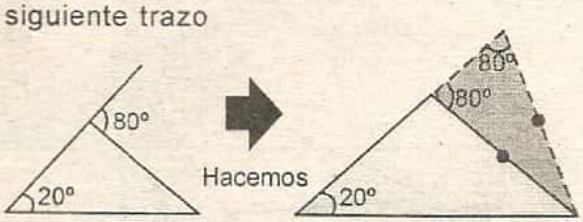
∴ de la figura: $2x = 60°$
$x = 30°$

Solución Nº 49

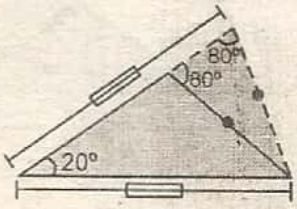
En la figura se observa:

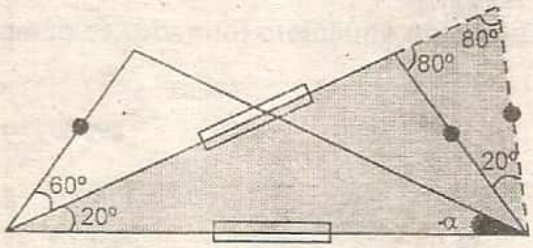


Paso N° 1
Tenemos el siguiente triángulo donde se realiza el siguiente trazo

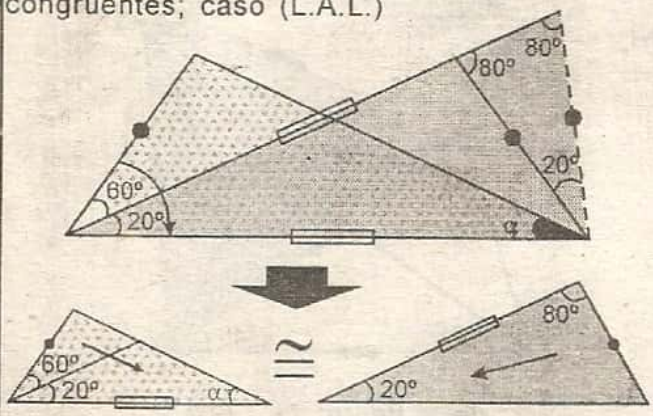


También se obtiene





Paso N° 2
Ahora observa que se obtiene dos triángulos congruentes; caso (L.A.L.)

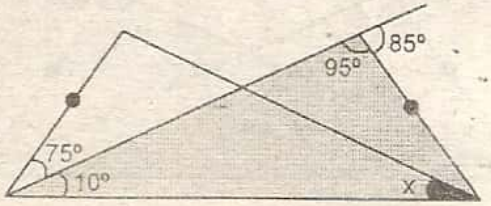


De la figura se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"

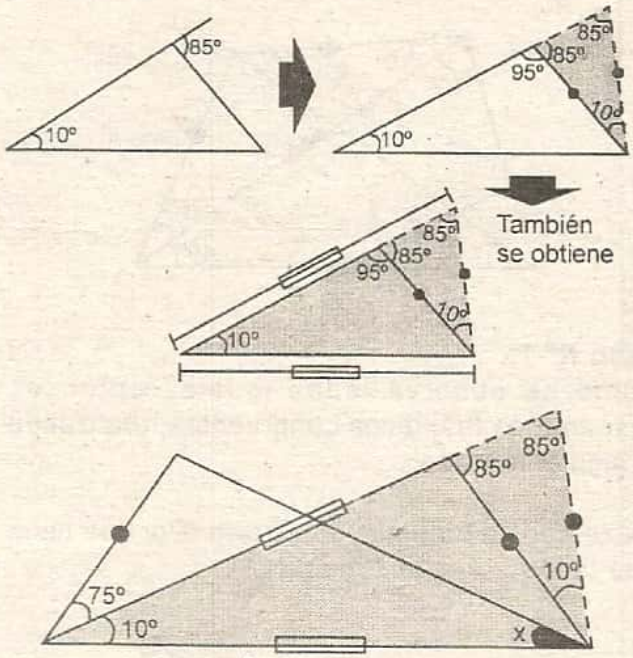
$\therefore \quad \alpha = 20°$

Solución N° 50

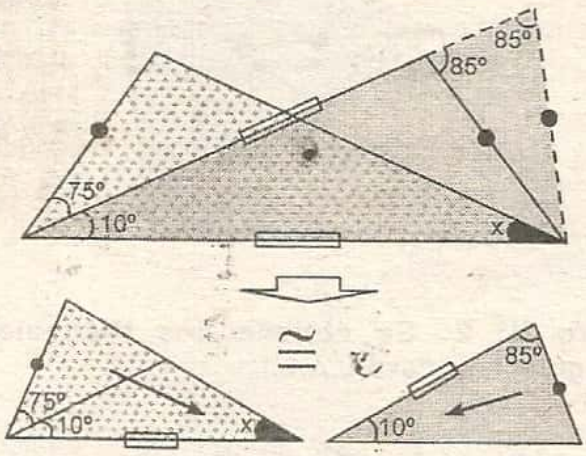
En la figura, observamos:



Paso N° 1: Tenemos el siguiente triángulo donde realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles.



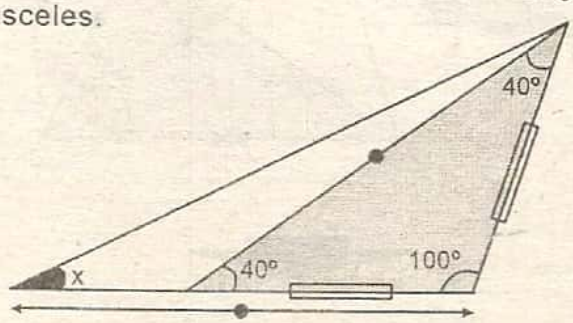
Paso N° 2: Con el trazo realizado se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



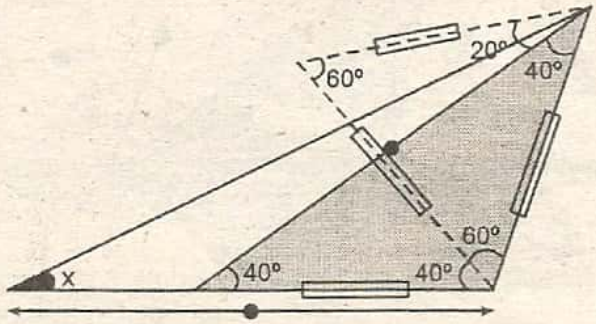
$\therefore$ De la figura: Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales". $x = 10°$

Solución N° 51

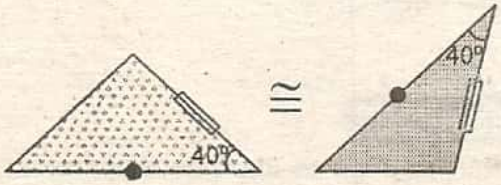
En la figura, sombreada observamos un triángulo isósceles.

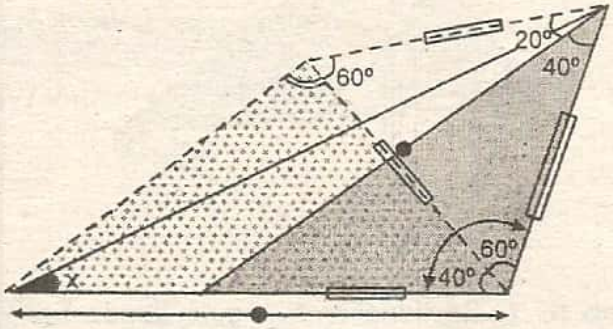


Paso N° 1:
Se traza un triángulo equilátero (Nos brinda 3 ángulos y 3 lados iguales).
El trazo se realizaría de la siguiente manera.

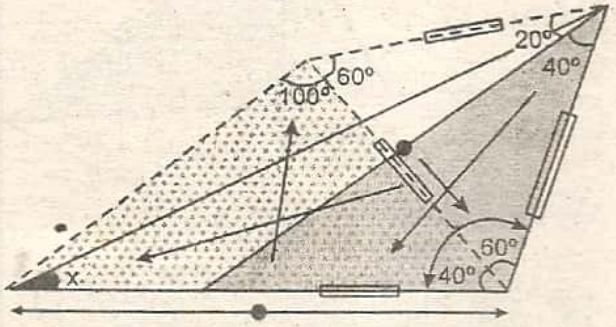


Paso N° 2:
Se observa que se ha generado en la nueva figura dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)

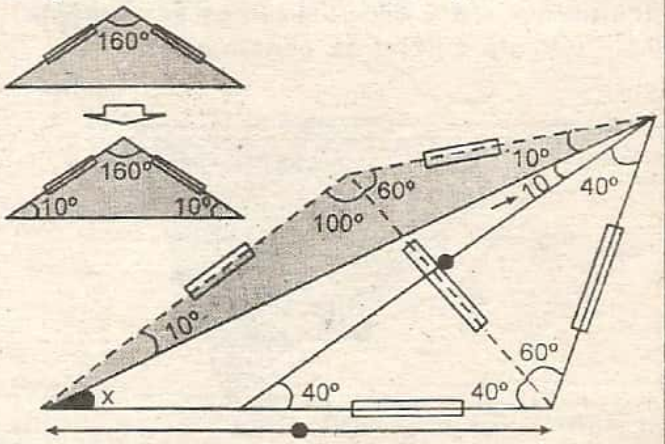




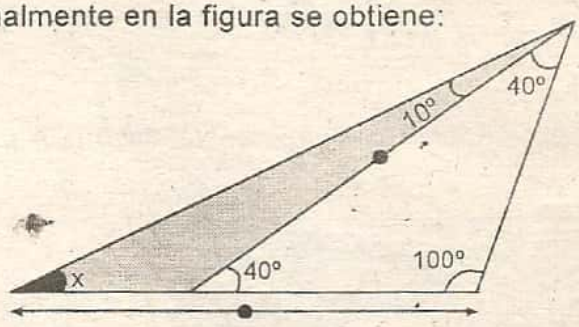
Donde se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



Paso N° 3:
Luego se observa un nuevo triángulo isósceles.



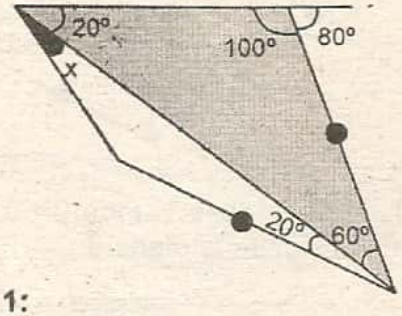
Paso N° 4:
Finalmente en la figura se obtiene:



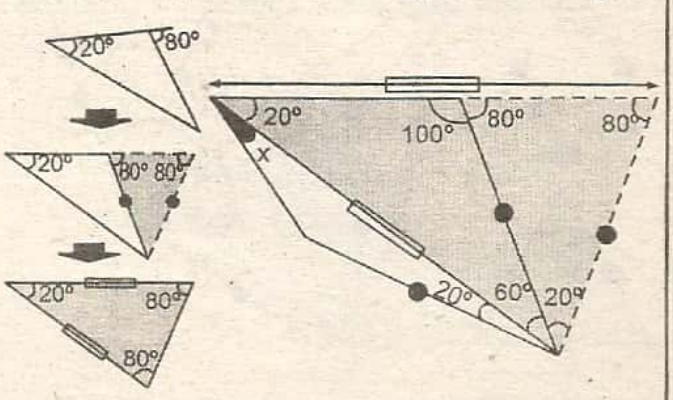
$x + 10° = 40°$
$x = 30°$

Solución N° 52

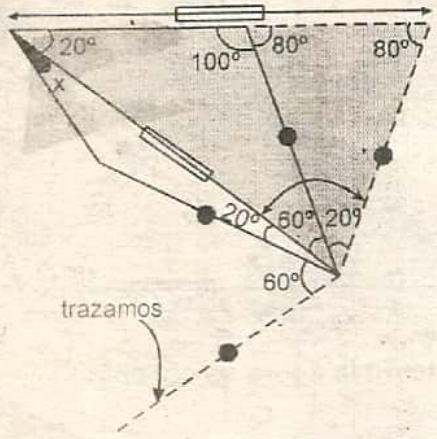
En la figura observamos:



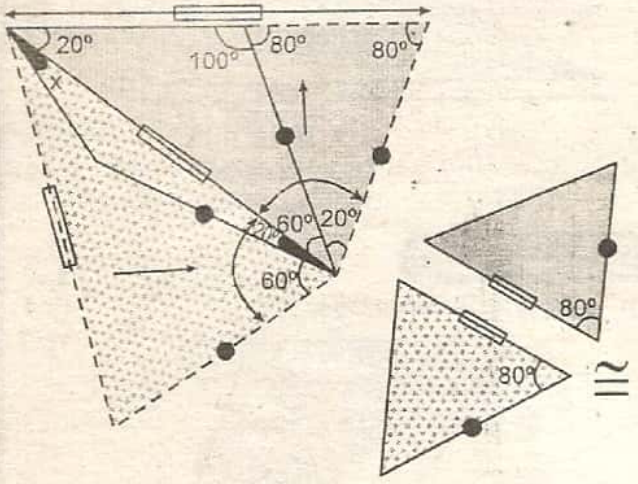
Paso N° 1:
Se observa que tenemos el siguiente triángulo.



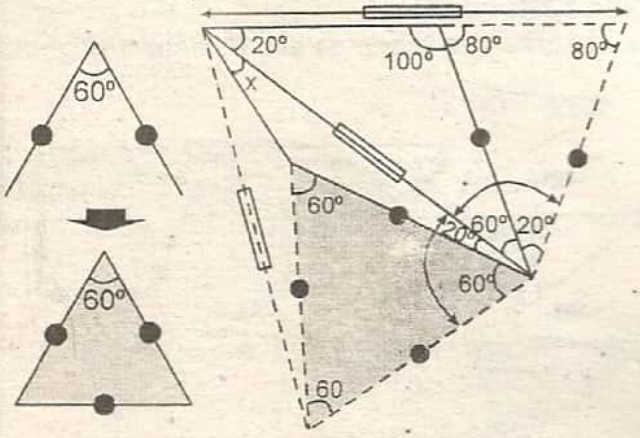
Paso Nº 2: Como observamos lados iguales buscaremos trazar en la figura triángulos congruentes, para ello realizamos el siguiente trazo. (Quinto criterio de construcción)



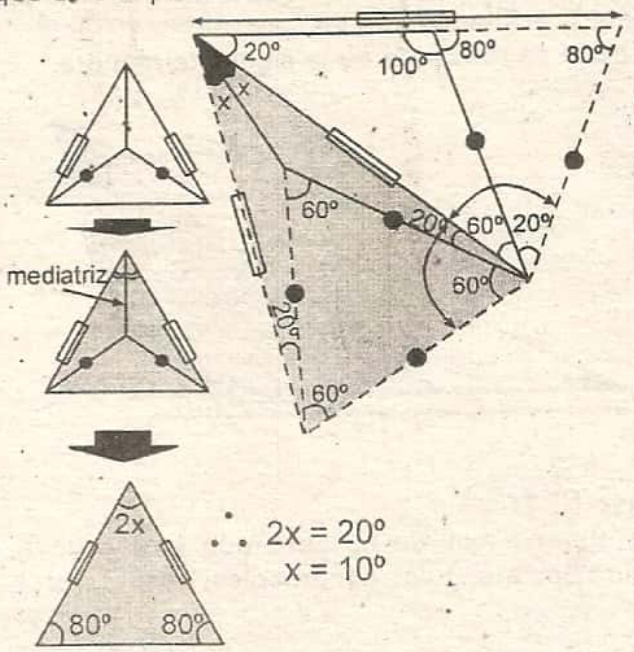
Con ello generamos congruencia, caso (L.A.L.)



Paso Nº 3: Ahora observamos un triángulo equilatero de la siguiente manera:



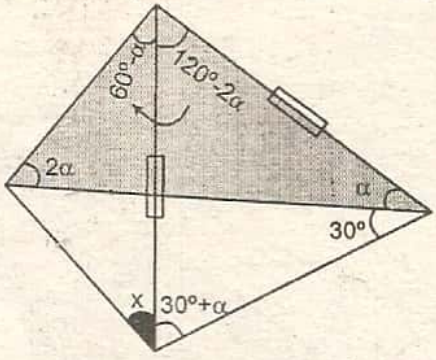
Paso Nº 4: Luego observamos la siguiente figura que se cumple:



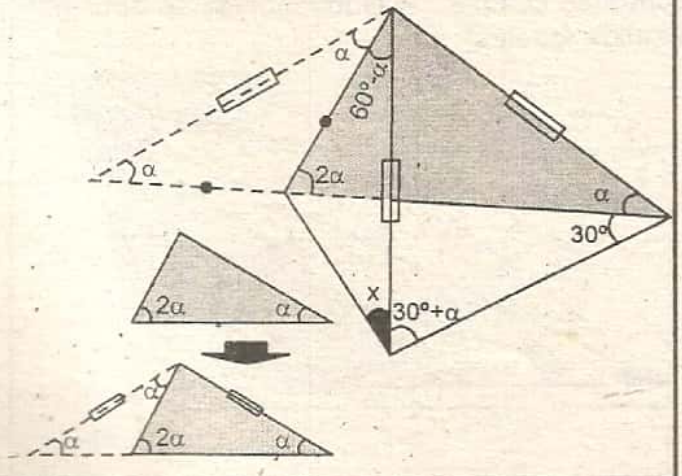
$\therefore$ $2x = 20°$
$x = 10°$

Solución Nº 53

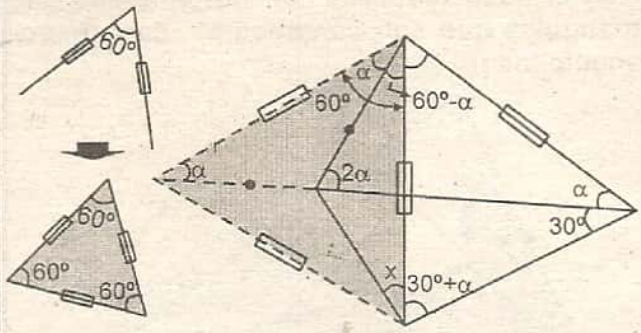
Completamos ángulos internos de la figura.



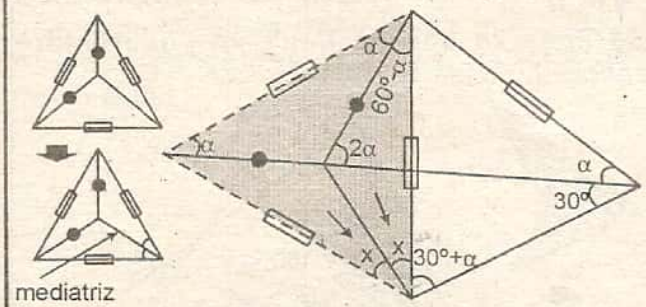
Paso Nº 1: Se tiene un triángulo donde tiene ángulos en la relación de 1 a 2; entonces se realizamos el primer criterio de construcción.



Paso N° 2: Ahora tenemos en la figura un triángulo equilátero.



Paso N° 3: Luego observamos la siguiente figura donde se cumple:

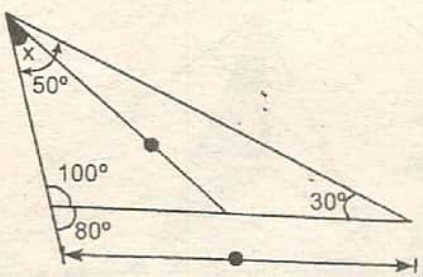


$\therefore \quad 2x = 60°$

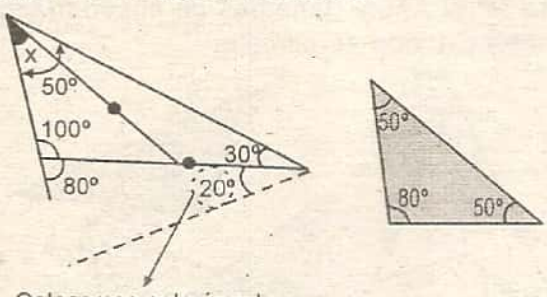
$x = 30°$

Solución N° 54

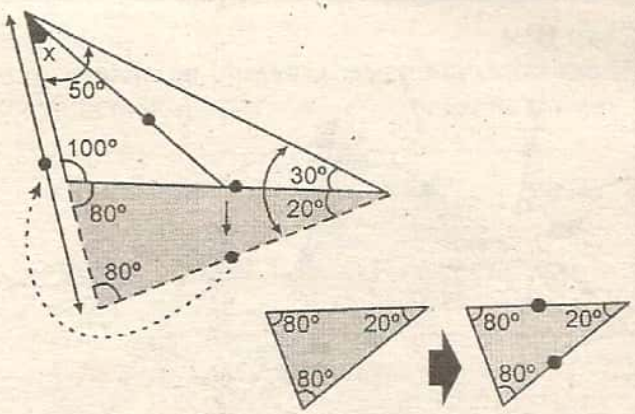
En la figura, observamos:



Paso N° 1: Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.

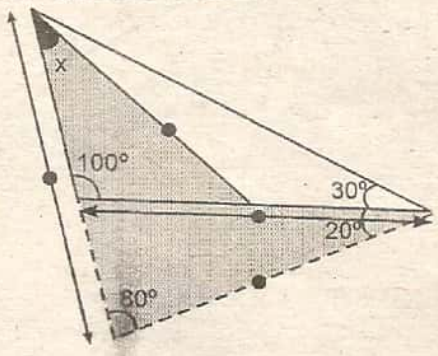


Colocamos este ángulo para obtener en la figura total un triangulo isosceles



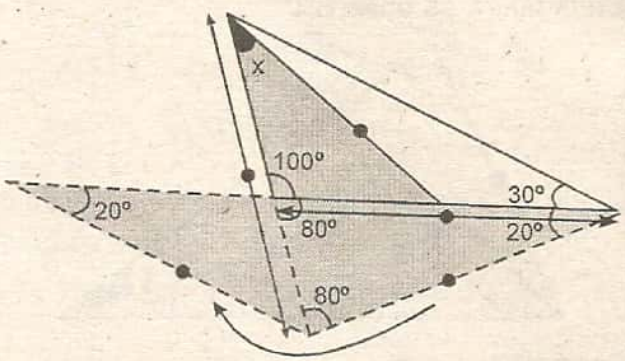
Paso N° 2:

Ahora en la nueva figura, observamos un cuadrilátero concavo, donde posee las siguientes características.

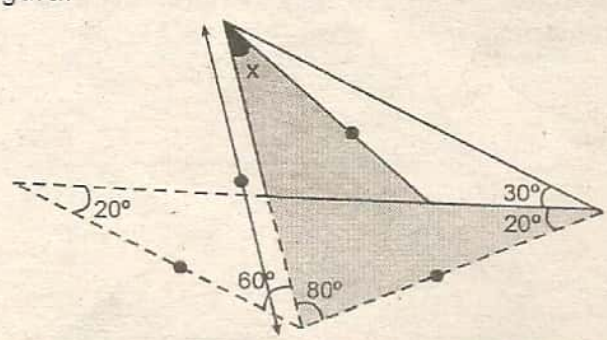


Paso N° 3:

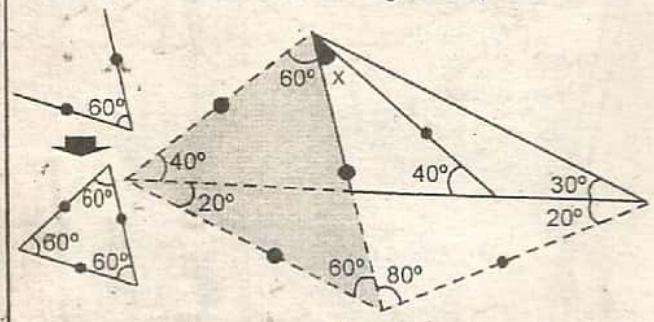
Realizamos el siguiente trazo, utilizando el sexto criterio de construcción (ángulo espejo)



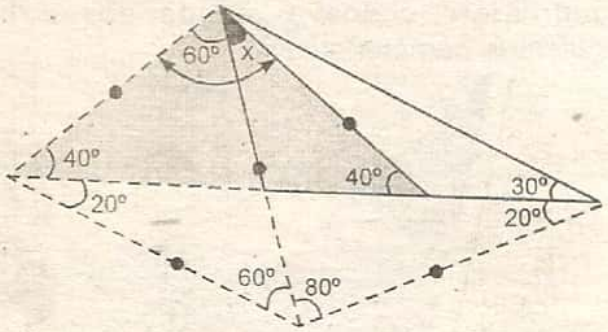
Ahora completamos los ángulo internos en la figura:



Paso N° 4:
Ahora observamos un triángulo equilátero:



Paso N° 5: Obtenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

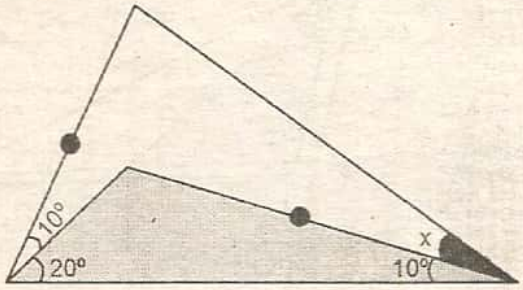


$\therefore\ 40° + 60° + x + 40° = 180°$

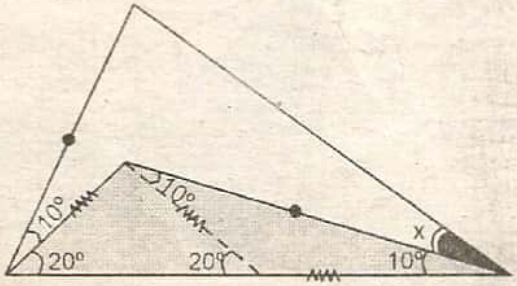
$x = 40°$

Solución N° 55

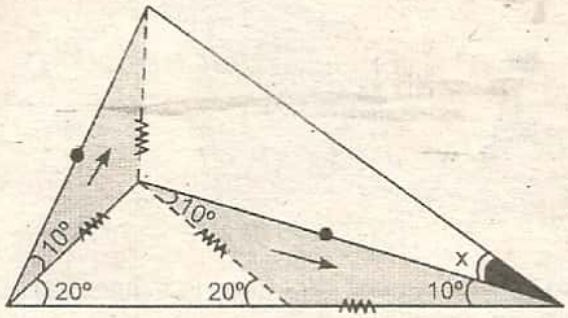
En la figura se observa:



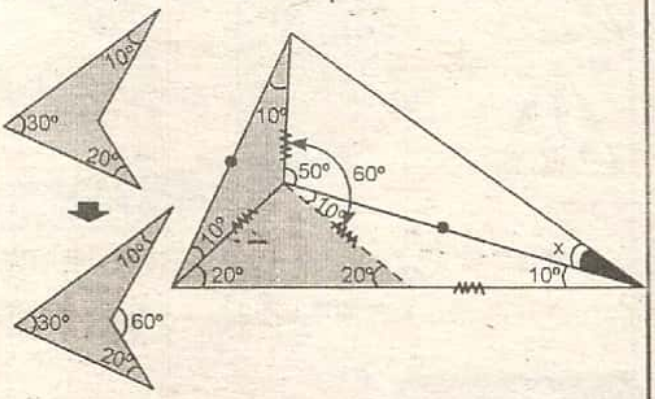
Paso N° 1:
Observamos en un triángulo ángulos en la relación de uno a dos (Primer criterio de construcción)



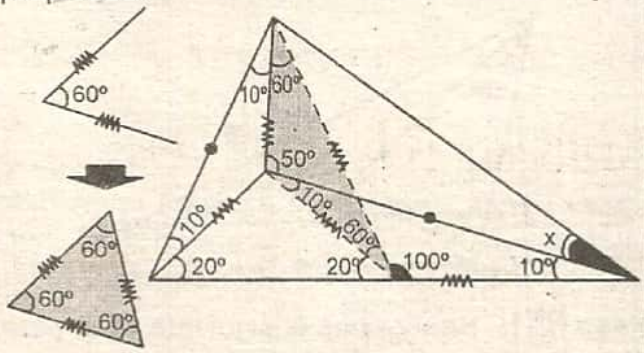
Paso N° 2:
Con el trazo realizado se ha generado dos triángulos que son congruentes, caso (lado-ángulo-lado)



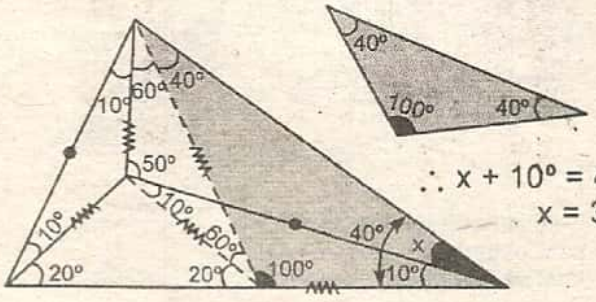
Paso N° 3:
Se observa que se tiene un cuadrilatero cóncavo, donde se cumple:



Paso N° 4: En la figura se observa la siguiente propiedad:



Paso N° 5: Ahora, tenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

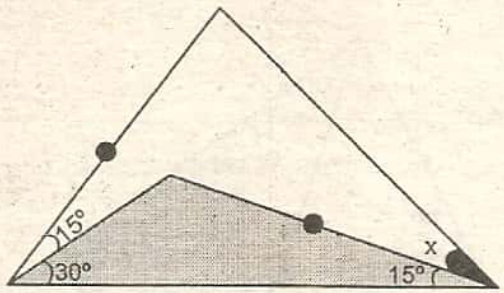


$\therefore\ x + 10° = 40°$

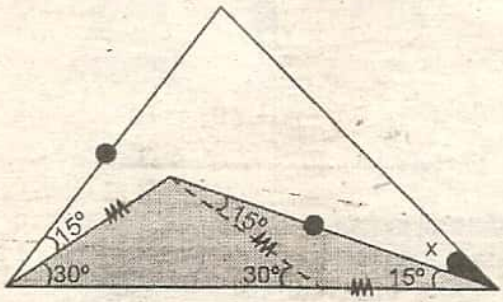
$x = 30°$

Solución Nº 56

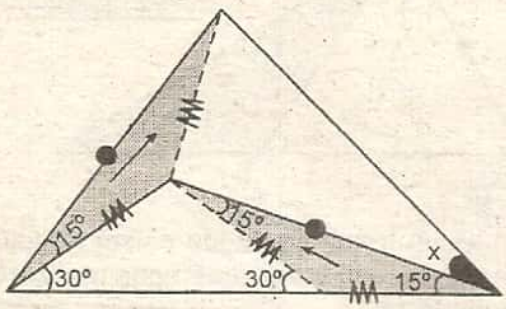
En la figura se observa:



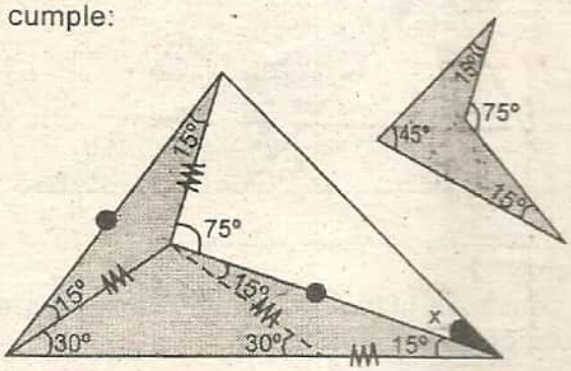
Paso Nº 1:
Observamos en el triángulo sombreado que tiene ángulos en la relación de uno a dos, entonces aplicamos el primer criterio de construcción.



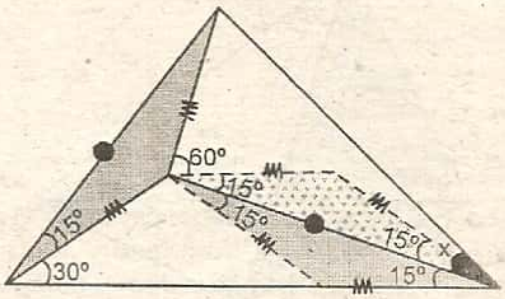
Paso Nº 2:
Con el trazo realizado se obtiene dos triángulos que son congruentes; caso (L.A.L.)



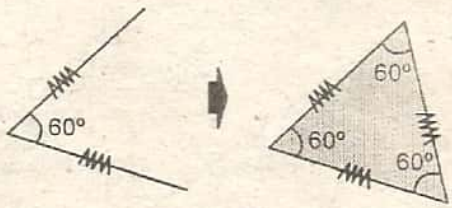
Paso Nº 3:
Ahora tenemos un cuadrilatero cóncavo donde se cumple:

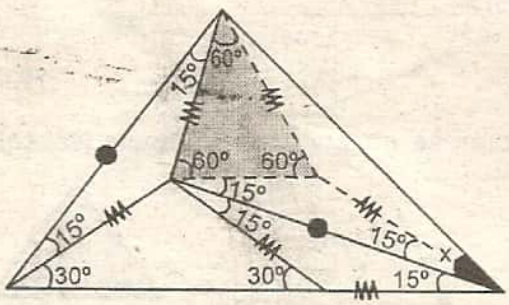


Paso Nº 4:
Luego trazamos otro triángulo congruente de la siguiente manera para así obtener lados iguales.

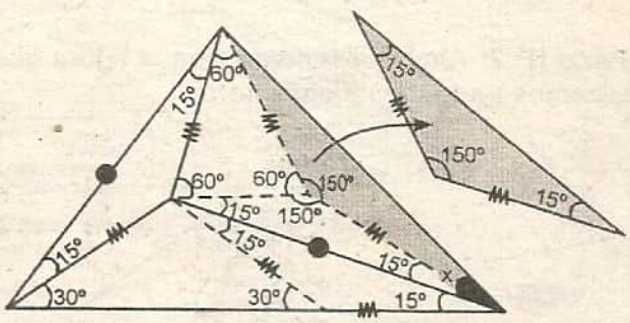


Paso Nº 5: Se observa la siguiente propiedad, donde se obtiene un triángulo equilátero.





Paso Nº 6:
Finalmente se observa que tenemos un nuevo triangulo isósceles donde se cumple:

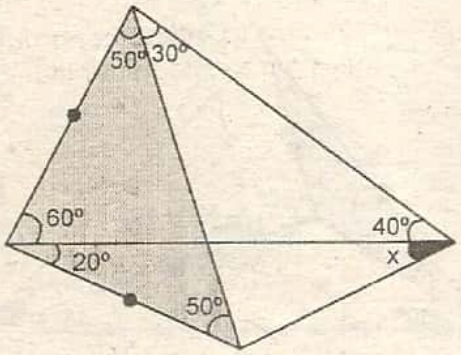


$\therefore \quad x = 15° + 15°$

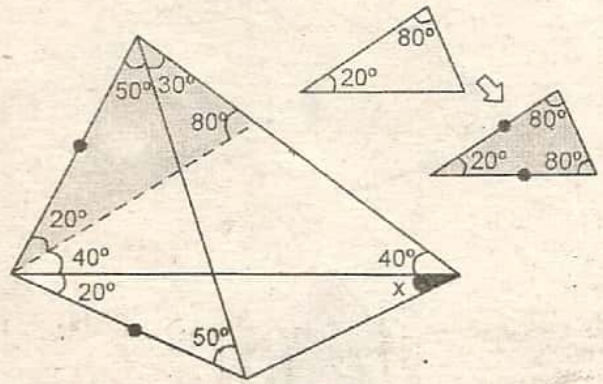
$x = 30°$

Solución Nº 57

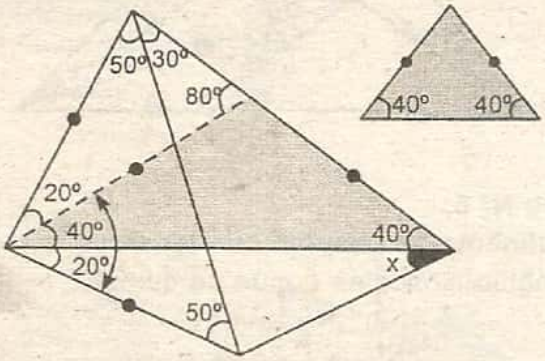
En la figura completamos los ángulos internos.



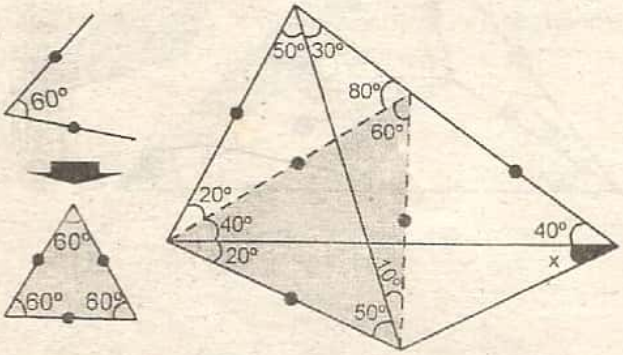
Paso Nº 1: Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.



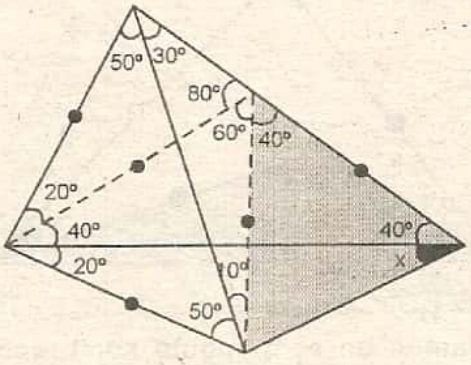
También se observa otro triángulo isósceles:

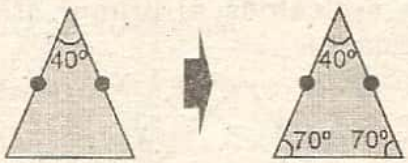


Paso Nº 2: Ahora observamos en la figura que tenemos un triángulo equilátero.



Paso Nº 3:
Luego se observa que tenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



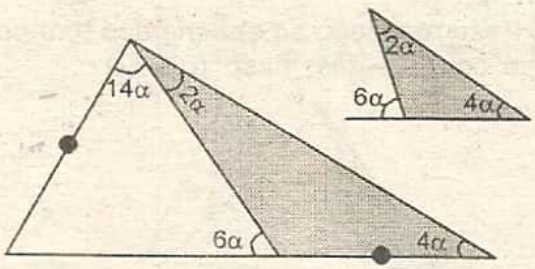


$\therefore \quad x + 40° = 70°$

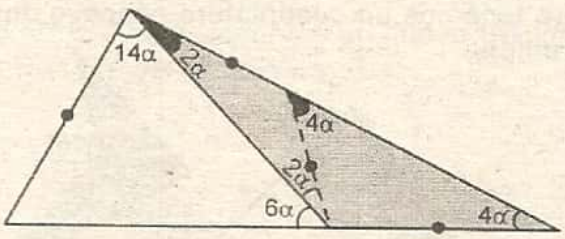
$x = 30°$

Solución Nº 58

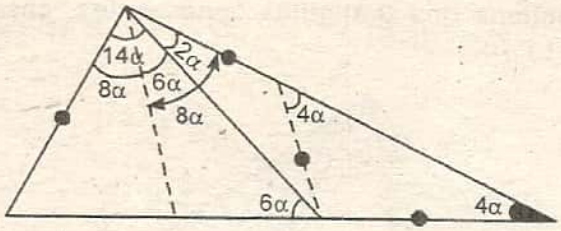
De la figura observamos:



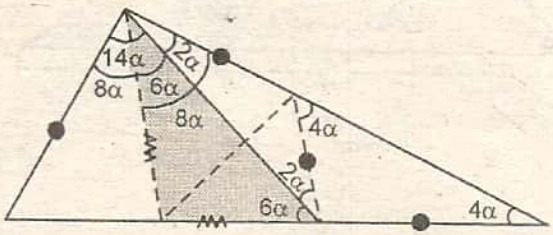
Paso Nº 1:
Tenemos un triángulo donde existe ángulos en la relación de uno a dos, entonces realizaremos el siguiente trazo.



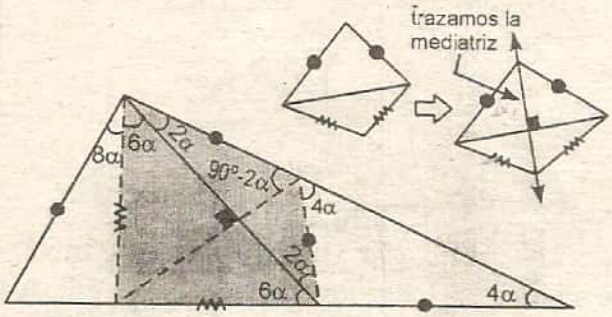
Paso Nº 2:
Se construye triángulos congruentes, para ello hacemos el siguiente trazo.



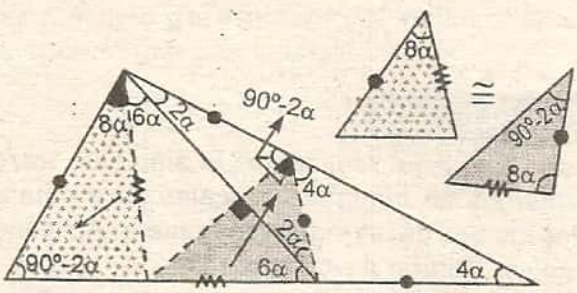
Con ello generamos triángulos isósceles:



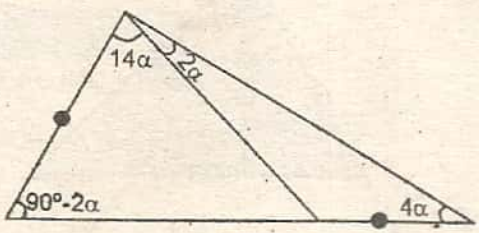
Paso Nº 3:
También se cumple la propiedad de la mediatriz.



Paso Nº 4: Ahora en la figura se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



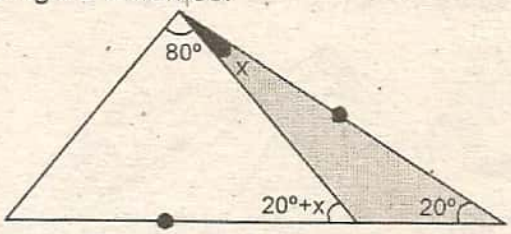
Luego se observa en la figura total se cumple:



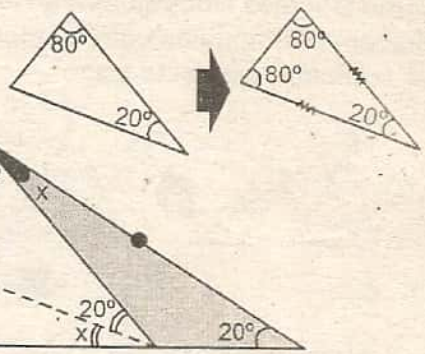
$$90°-2\alpha+14\alpha+2\alpha+4\alpha = 180°$$
$$18\alpha = 90°$$
$$\alpha = 5°$$

Solución Nº 59

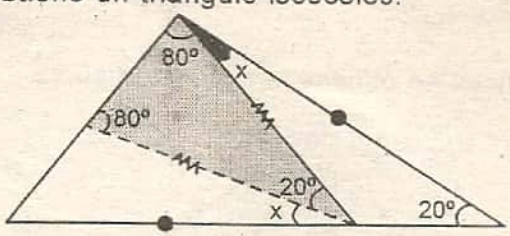
Se la figura tenemos:



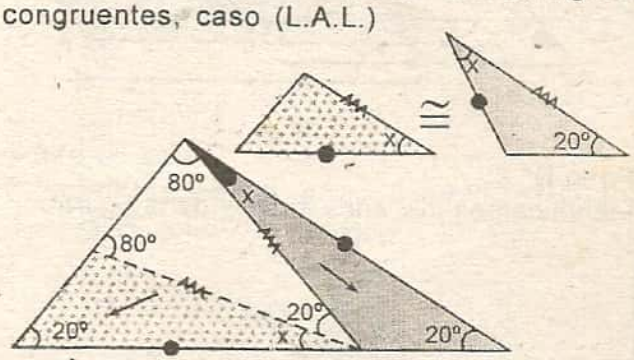
Paso Nº 1: Como tenemos lados iguales en forma alternada, buscamos en la figura triángulos congruentes realizando el siguiente trazo.



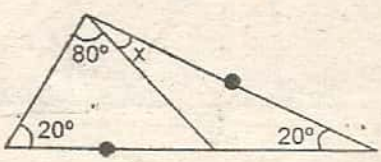
Se obtiene un triángulo isósceles:



Paso Nº 2: Luego se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



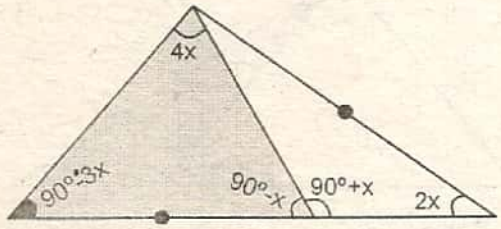
Paso Nº 3: En la figura total, se observa:



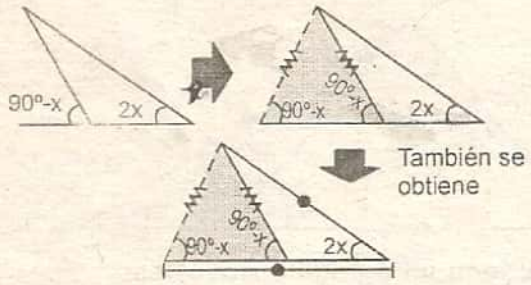
$$20° + 80° + x + 20° = 180°$$
$$x = 60°$$

Solución Nº 60

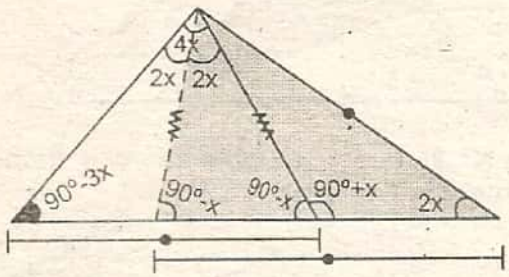
En la figura completamos los ángulos internos:



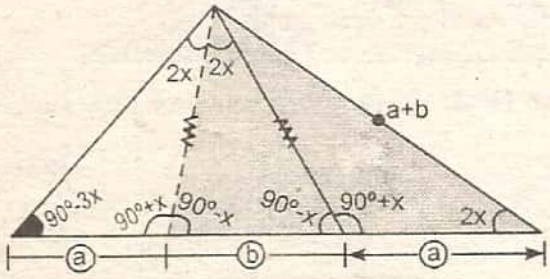
Paso Nº 1:
Como tenemos lados iguales en forma alternada, buscamos triángulos congruentes pero primero se realiza el siguiente trazo:



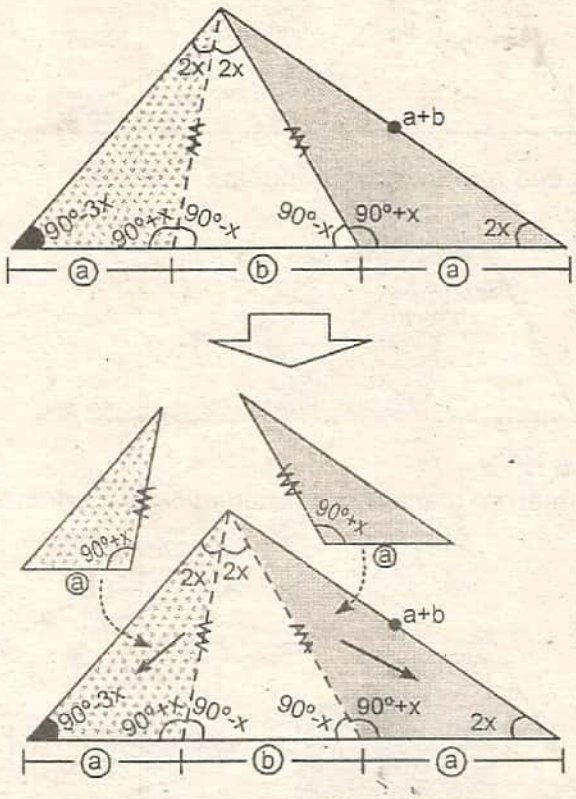
Entonces se obtiene la siguiente figura:



Paso Nº 2:
Identificamos los lados iguales de la figura:



Paso Nº 3:
Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L)

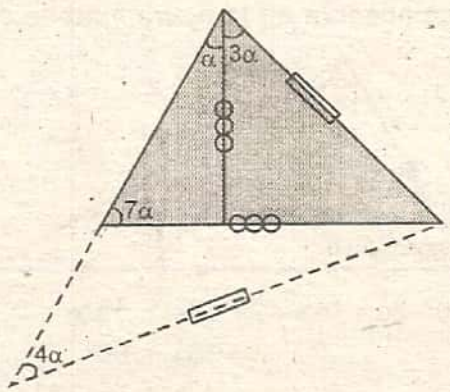


Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"

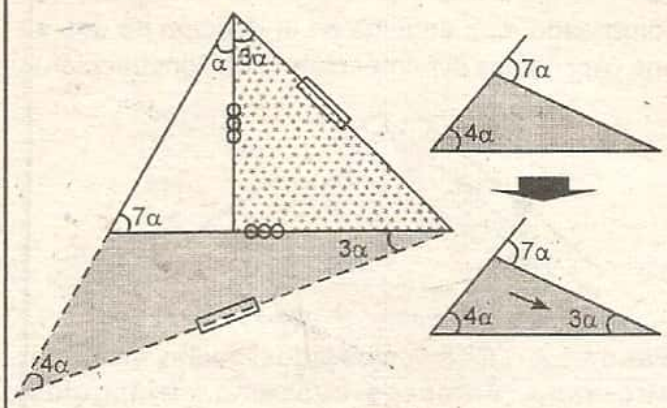
$$90° - 3x = 2x$$
$$90° = 5x$$
$$18° = x$$

Solución Nº 61

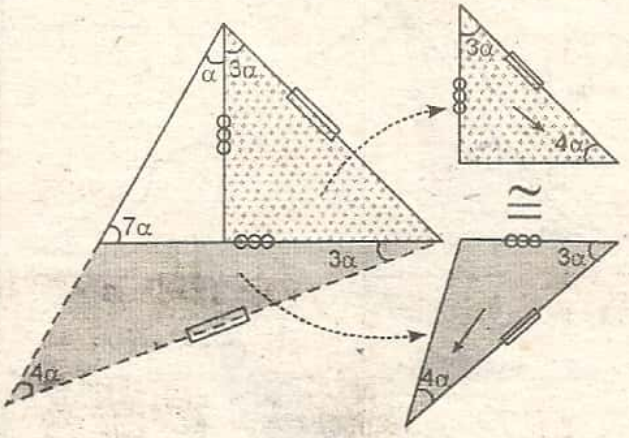
Paso Nº 1: Aquí realizamos el siguiente trazo; Formamos un triángulo isósceles para obtener lados iguales de las siguiente manera: Aplicando el quinto criterio de construcción:



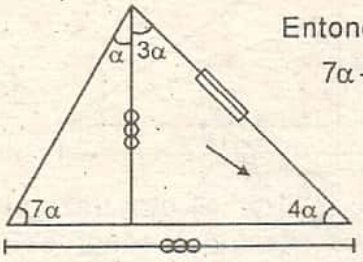
Tambien se observa:



Paso N° 2: Ahora se observa que se ha obtenido dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Paso N° 3:
Por principio de congruencia "A lados iguales se oponen ángulos iguales" .

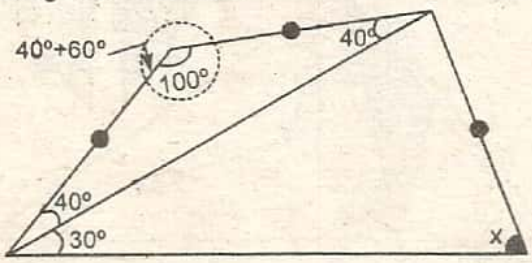


Entonces se cumple:

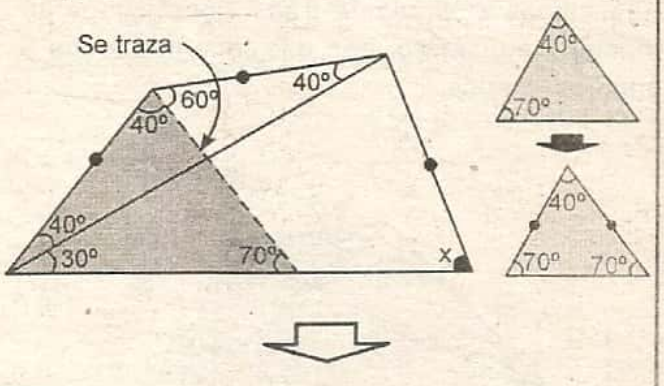
$$7\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$$
$$15\alpha = 180°$$
$$\alpha = 12°$$

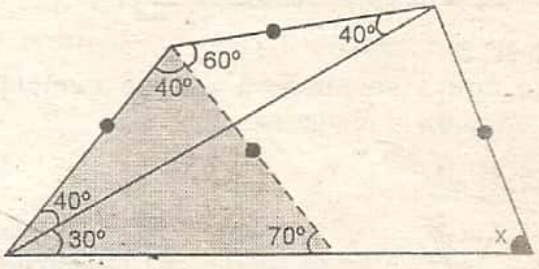
Solución N° 62

De la figura, tenemos:

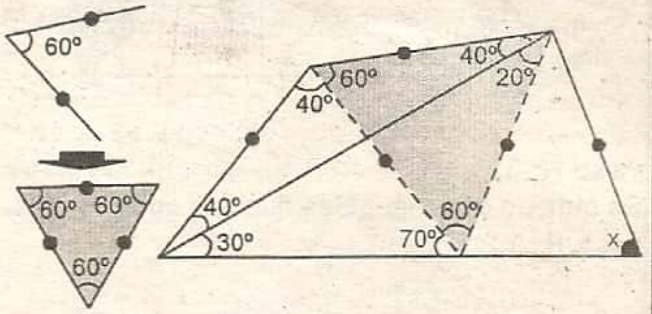


Paso N° 1:
Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.

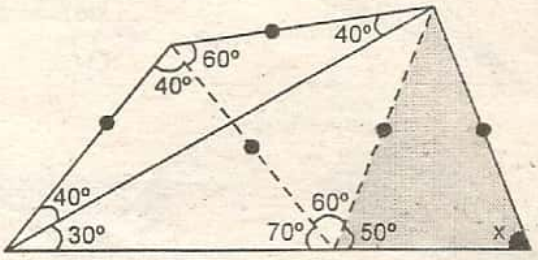




Paso N° 2:
En la figura mostrada se observa un triángulo equilátero.



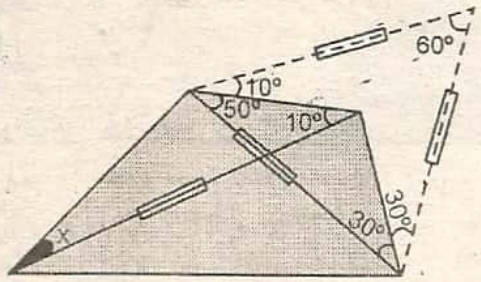
Paso N° 3:
Finalmente se obtiene un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



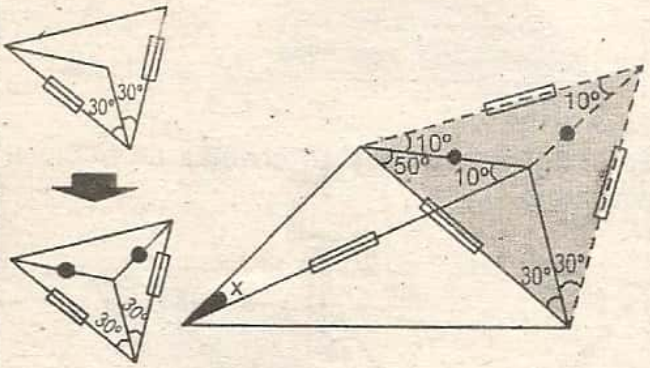
$$\therefore\ x = 50°$$

Solución Nº 63

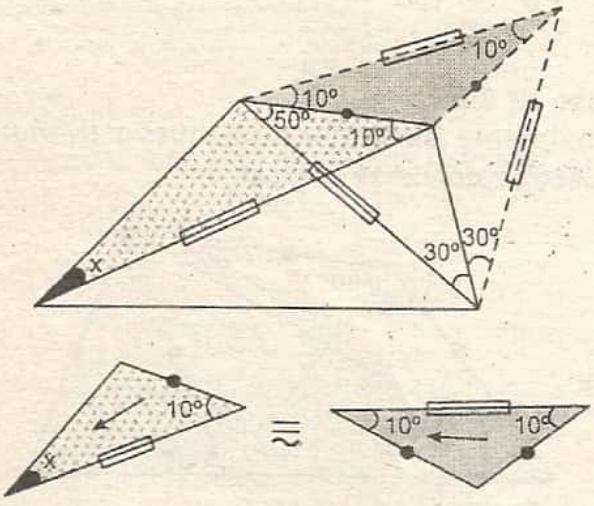
Paso Nº 1:
Realizamos el siguiente trazo, construimos un triángulo equilátero; con ello tenemos lados y ángulos iguales.



Paso Nº 2:
De la figura se observa que se cumple la propiedad de la mediatriz.



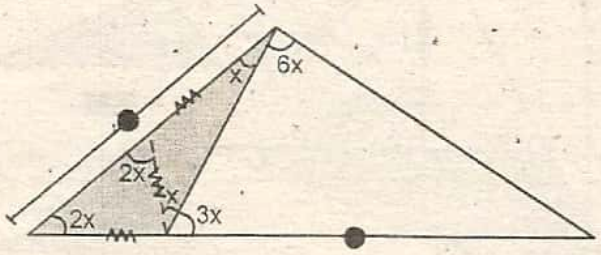
Paso Nº 3:
Se obtiene dos triángulos que son congruentes, caso (L.A.L.).



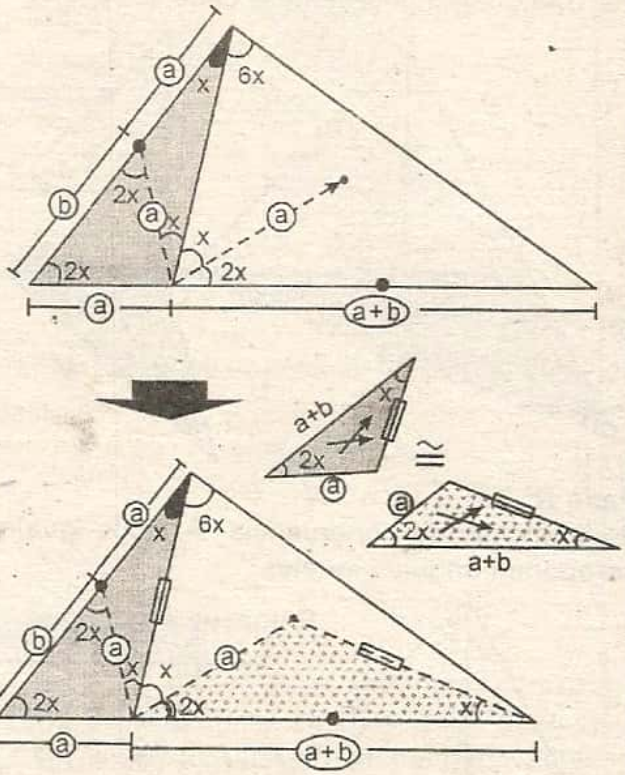
$\therefore\ x = 10^\circ$

Solución Nº 64

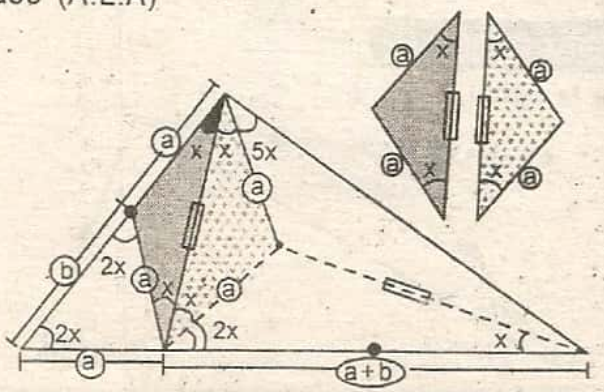
Paso Nº 1: En la figura, se observa triángulo sombreado; con ángulos en la relación de dos a uno (Aplicamos el primer criterio de construcción)



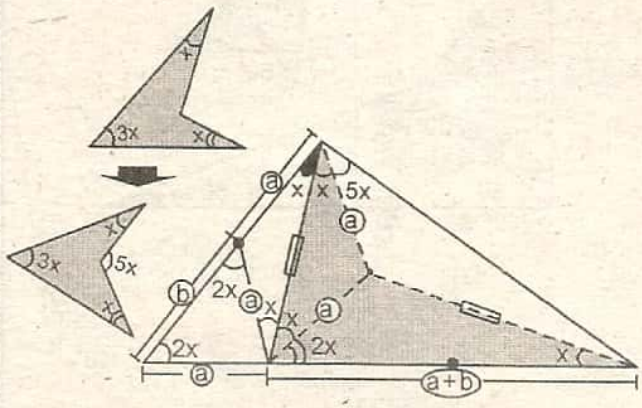
Paso Nº 2: Observamos lados iguales en forma alternada, entonces buscamos triángulos congruentes aplicando el quinto criterio de construcción.



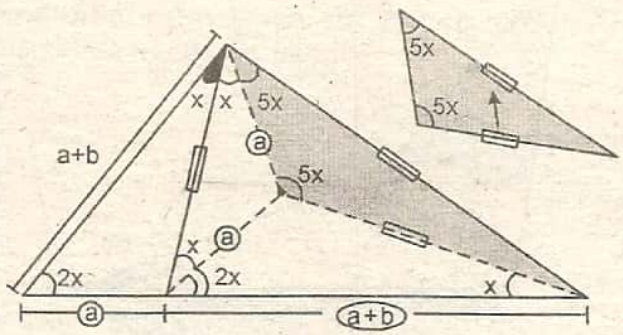
Paso Nº 3: Luego realizamos otro trazo para obtener dos nuevos triángulos congruentes, caso (A.L.A)



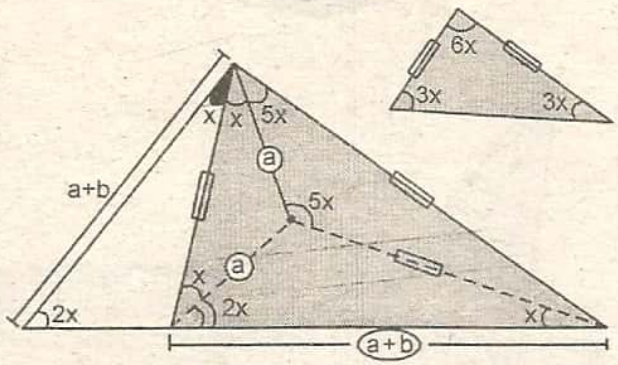
Paso N° 4: Realizado el paso anterior se obtiene un cuadrilátero concavo donde se cumple:



Paso N° 5:
Se obtiene un nuevo triángulo isósceles de la siguiente manera:



Paso N° 6:
Finalmente tenemos el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:



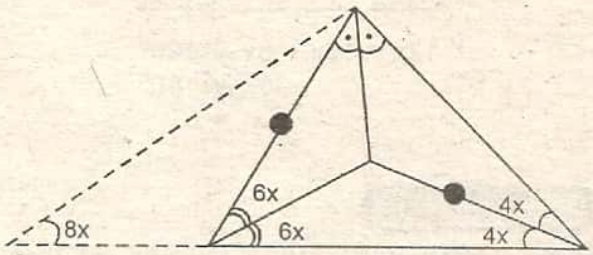
$$\therefore \quad 3x + 6x + 3x = 180^\circ$$

$$12x = 180^\circ$$

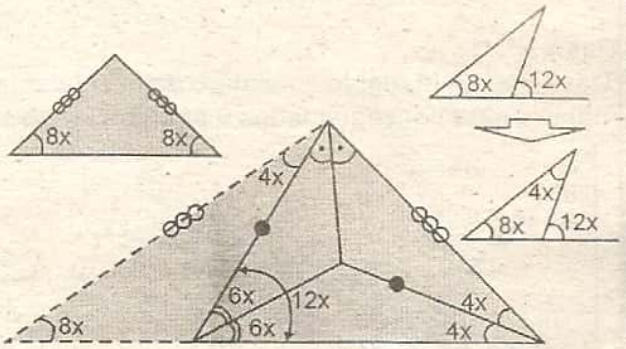
$$x = 15^\circ$$

Solución N° 65

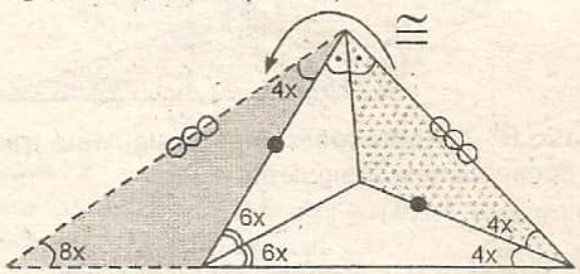
Paso N° 1:
Como observamos lados iguales en forma alternada, buscamos obtener triángulos congruentes realizando el siguiente trazo.



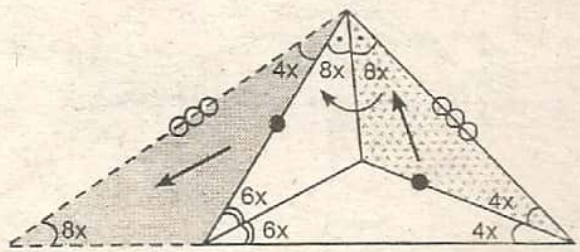
Paso N° 2:
El trazo realizado es para obtener un triángulo isósceles en donde se cumple:



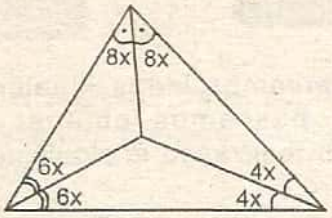
Paso N° 3:
Ahora se observa que tiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



Paso N° 4: Finalmente se obtiene:

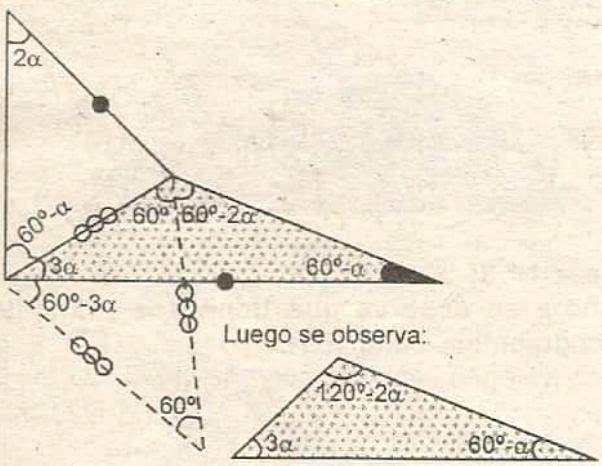


$$12x + 16x + 8x = 180^\circ$$
$$36x = 180^\circ$$
$$x = 5^\circ$$

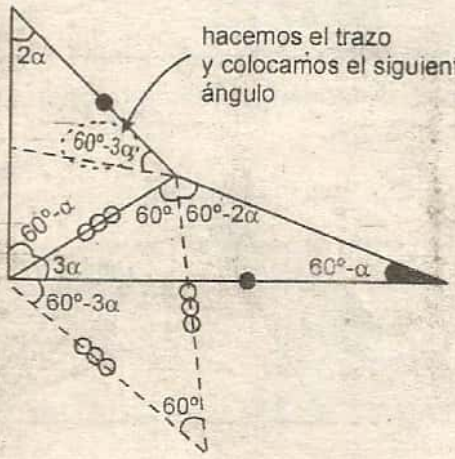
Solución N° 66

Como observamos lados iguales en forma alternada, entonces buscaremos en la figura triángulos que sean congruentes realizando los siguientes trazos.

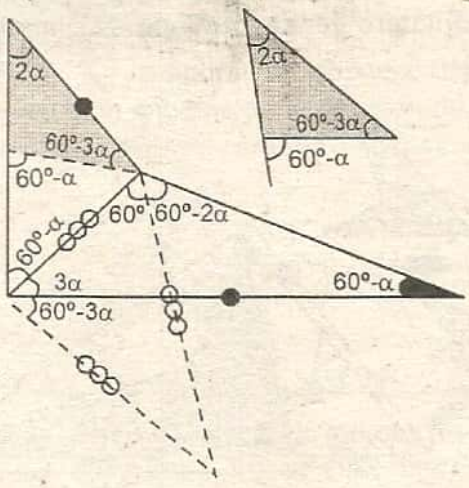
Paso N° 1:
Trazamos un triángulo equilátero de la siguiente manera para conseguir lados y ángulos iguales.



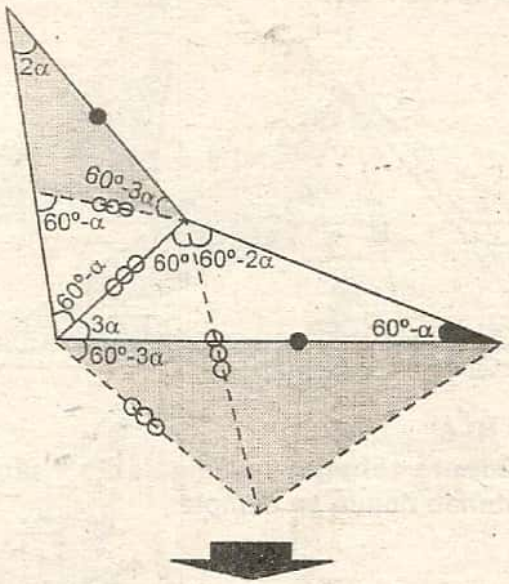
Paso N° 2: Ahora realizamos el siguiente trazo y conseguimos la siguiente figura.

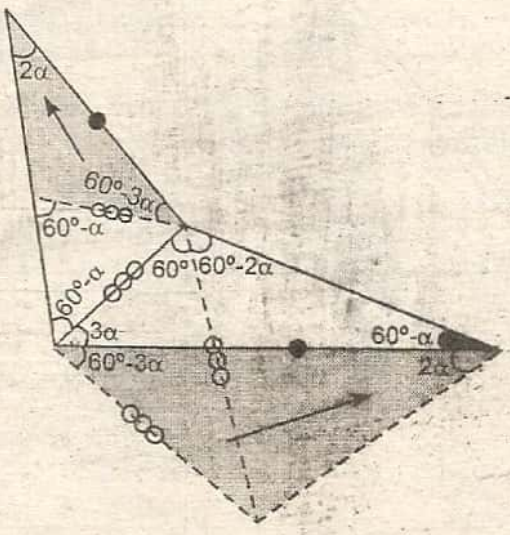


Con ella obtenemos:

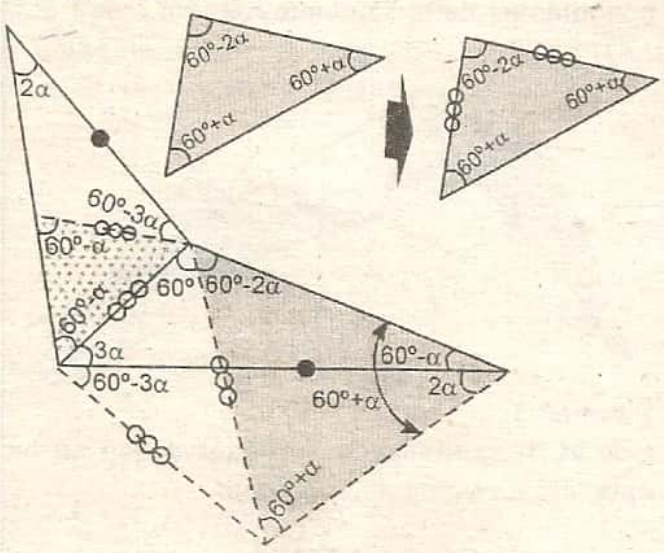


Paso N° 3:
Observamos en la figura dos triángulos congruentes, caso (L.A.L)

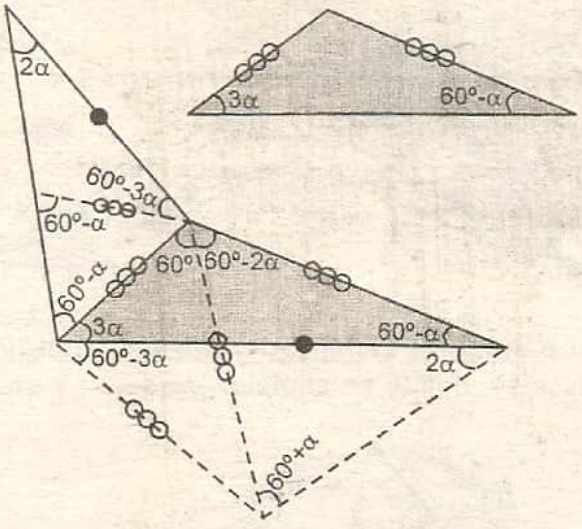




Paso Nº 4:
Ahora se observa en la figura que tenemos un triángulo isósceles.



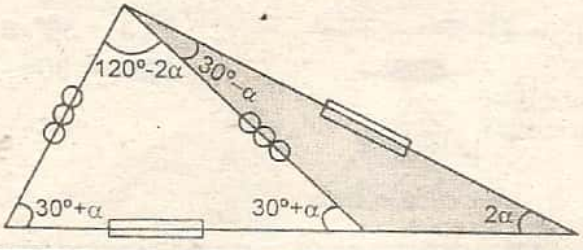
Paso Nº 5:
Finalmente tenemos un nuevo triángulo isósceles, donde se cumple:



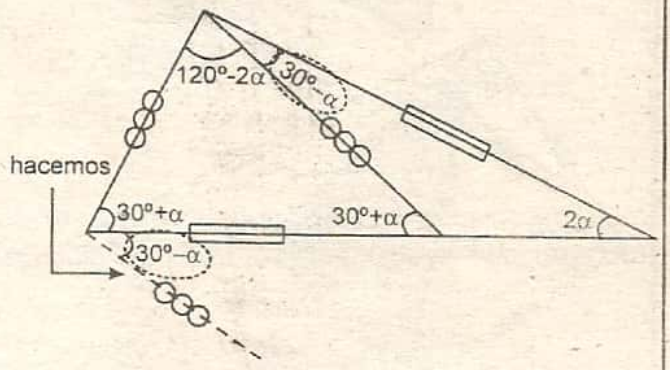
$$\Rightarrow \quad 3\alpha = 60° - \alpha$$
$$4\alpha = 60°$$
$$\alpha = 15°$$

Solución Nº 67

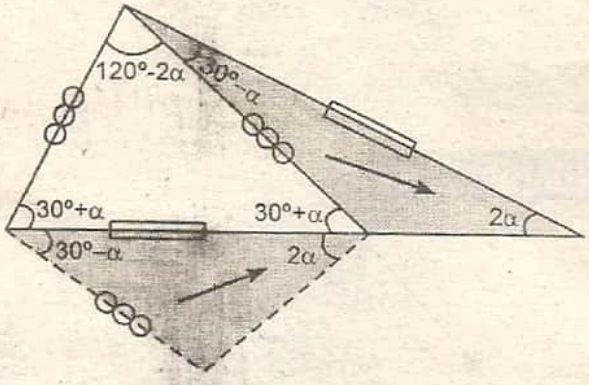
En la figura completamos los ángulos internos.



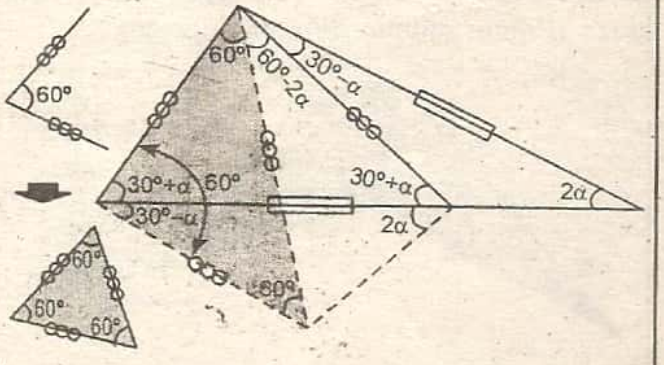
Paso Nº 1:
Como se tiene en la figura lados iguales en forma alternada, entonces, buscamos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo aplicando el quinto criterio de construcción.



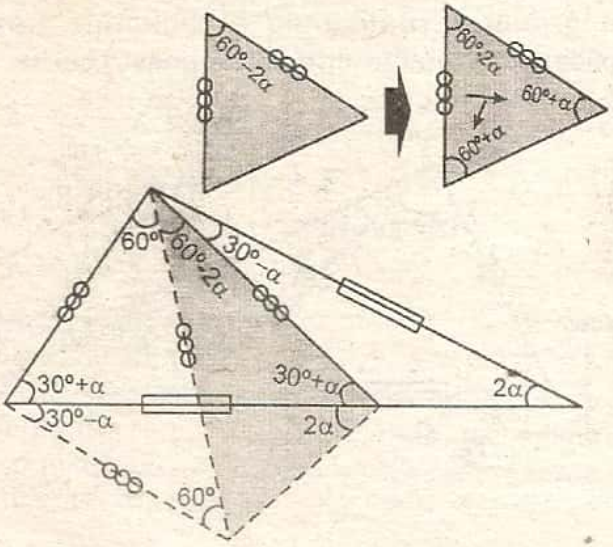
Aquí obtenemos dos triángulos congruentes; caso (L.A.L)



Paso Nº 2:
Ahora observamos en la figura un triángulo equilátero.



Paso Nº 3: Ahora se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:



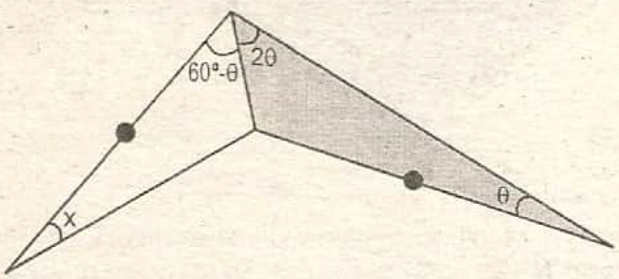
∴ de la figura:

$$30°+\alpha+2\alpha = 60°+\alpha$$

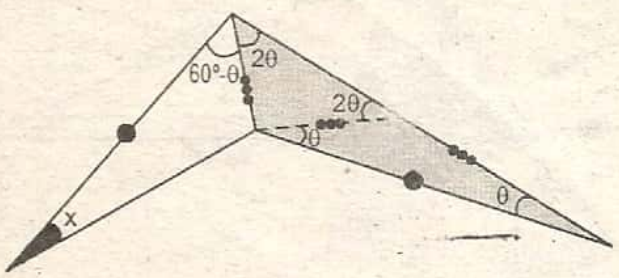
$$2\alpha = 30°$$

$$\alpha = 15°$$

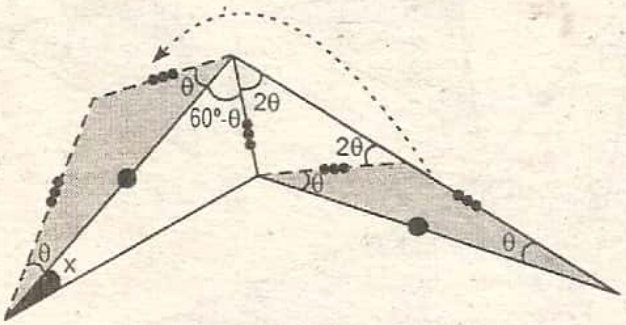
Solución Nº 68



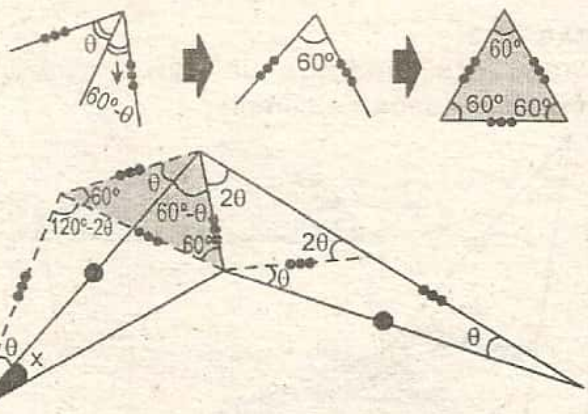
Paso Nº 1:
En la figura observamos ángulos en la relación de dos a uno, entonces realizamos el siguiente trazo (Primer criterio de construcción).



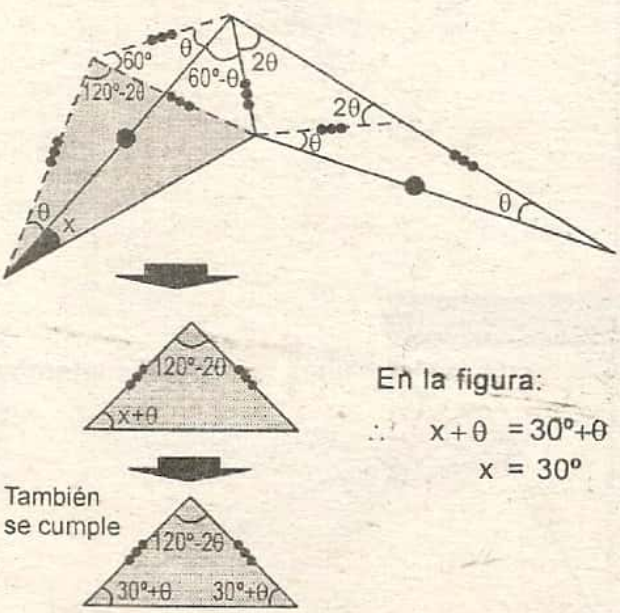
Paso Nº 2:
Ahora como observamos lados iguales en forma alternada, entonces formamos triángulos congruentes de la siguiente manera.



Paso Nº 3:
Con el trazo realizado se observa que se ha obtenido un triángulo equilátero.



Paso Nº 4: Luego tenemos un triángulo isósceles, donde se cumple:



En la figura:

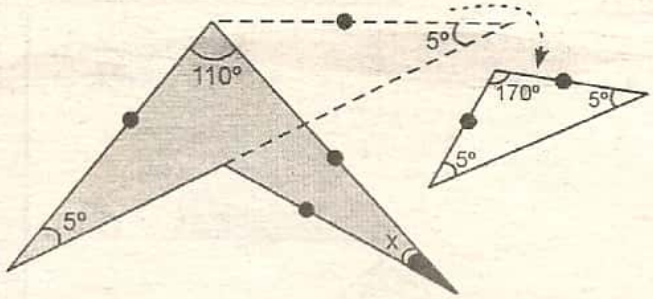
$$\therefore \quad x+\theta = 30°+\theta$$

$$x = 30°$$

Solución Nº 69

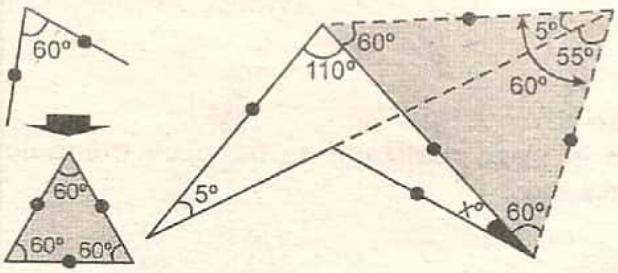
Paso Nº 1:

En la figura se observa que podemos obtener un triángulo isósceles realizando el siguiente trazo: El sexto criterio de construcción.



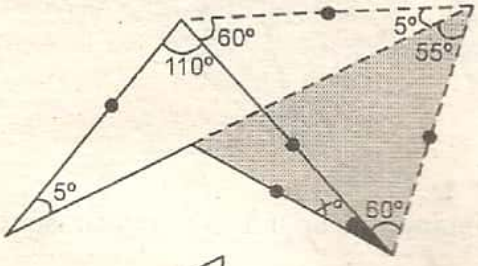
Paso Nº 2:

Con el trazo realizado se observa que obtenemos un ángulo de 60° y también lados iguales donde se cumple la siguiente propiedad.

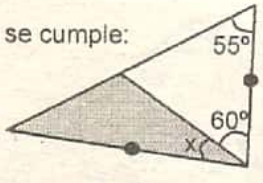


Paso Nº 3:

Ahora observamos un triángulo isósceles en la figura sombreada.

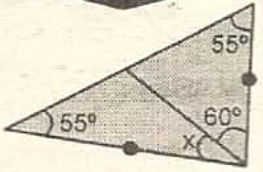


Aquí se cumple:



$55° + 55° + 60° + x = 180°$

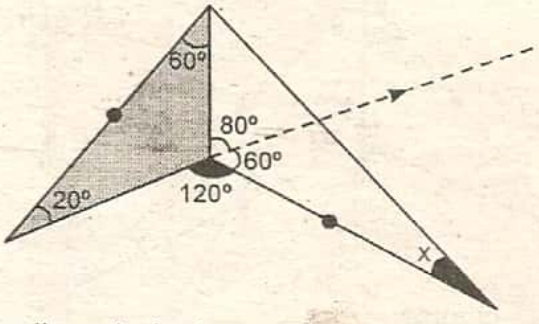
$x = 10°$



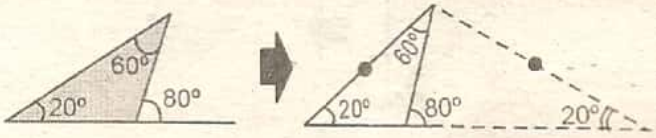
Solución Nº 70

Paso Nº 1:

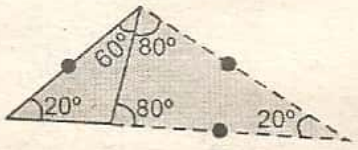
En la figura mostrada se observa:

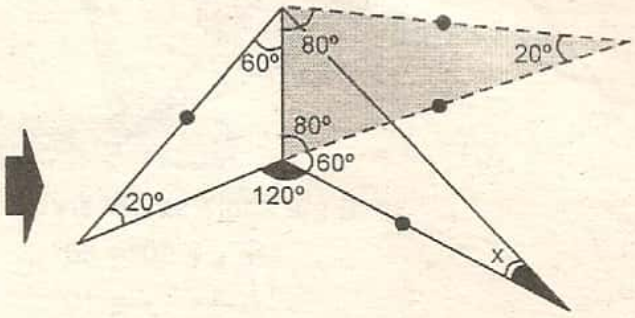


Se realiza el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles (Sexto criterio de construcción)



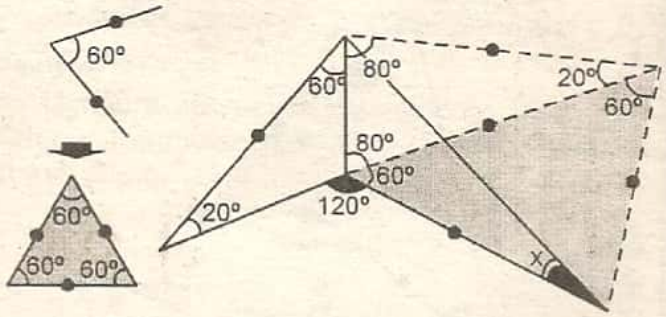
También se obtiene





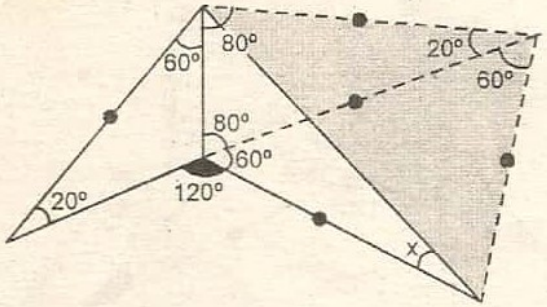
Paso Nº 2:

Con el trazo realizado se observa que obtiene un triángulo equilátero en la figura sombreada.

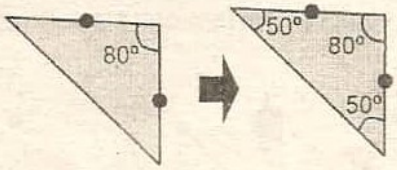


Se con bastante seguridad que yo mismo no tengo ningún don especial, la curiosidad, la obsesión y la resistencia obstinada unida a mi autocrítica me han aportado mis ideas. (Albert Einstein)

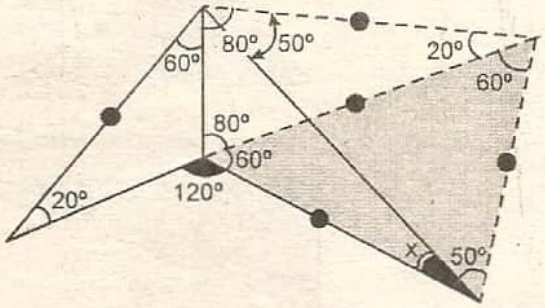
Paso N° 3:
Ahora observamos que se tiene en la figura un nuevo triángulo isósceles.



Aqui se cumple:



Paso N° 4: Se obtiene un nuevo triángulo isósceles, donde cumple:



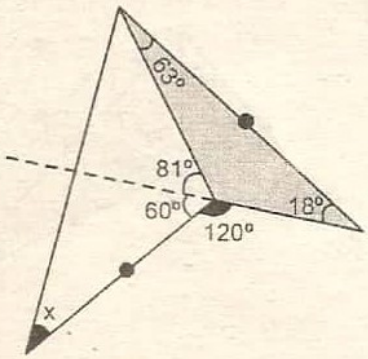
∴ En la figura se observa:

$x + 50° = 60°$

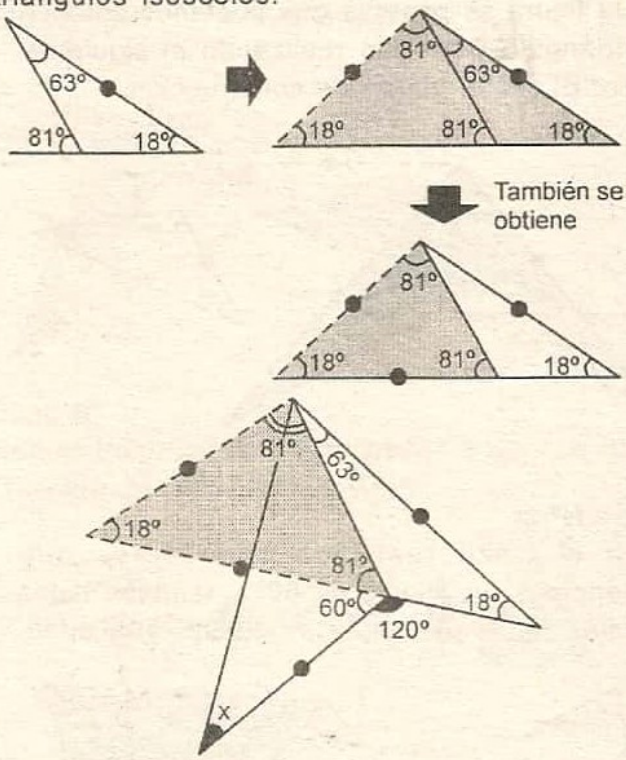
$x = 10°$

Solución N° 71

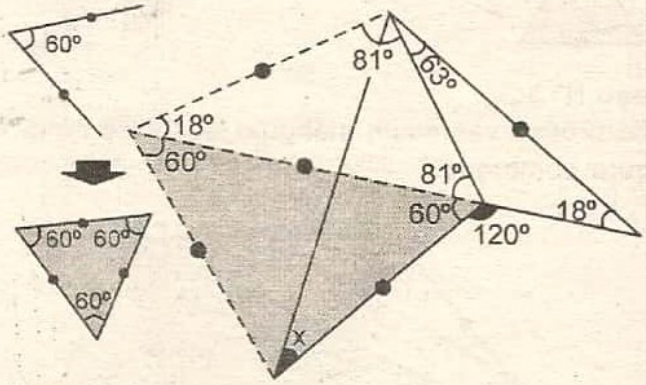
En la figura mostrada se observa:



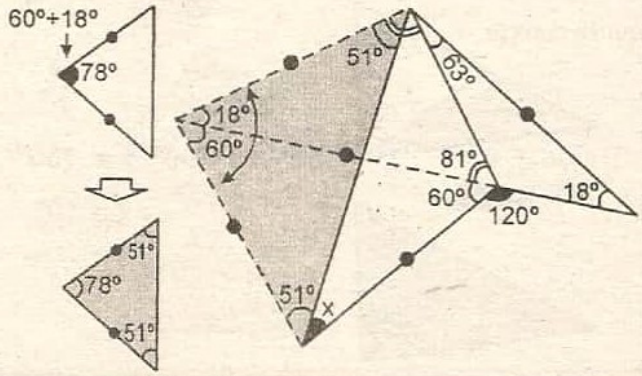
Paso N° 1: En la siguiente figura se realizará el sexto criterio de construcción, para encontrar triángulos isósceles:



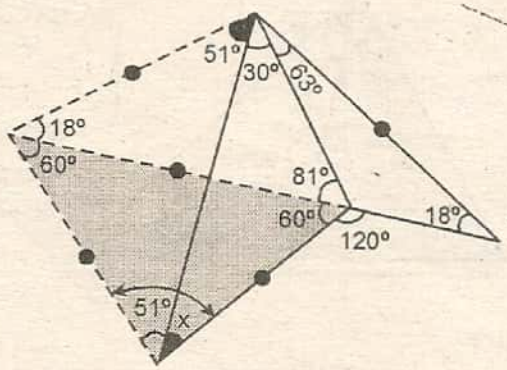
Paso N° 2:
Con el trazo realizado se tiene un triángulo equilátero.



Paso N° 3:
Luego obtenemos un nuevo triángulo isósceles.



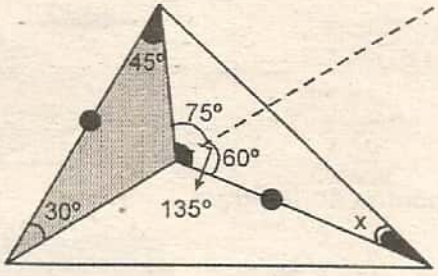
Paso Nº 4:
En la nueva figura se obtiene un triángulo equilátero donde se cumple:



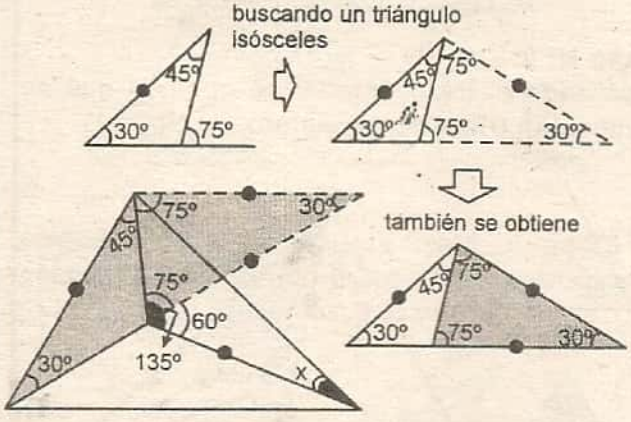
$x + 51° = 60°$
$x = 9°$

Solución Nº 72

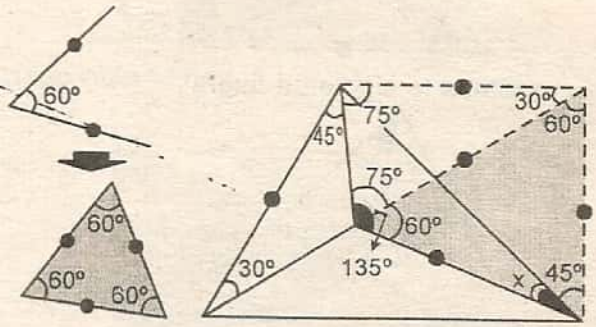
En la figura se observa:



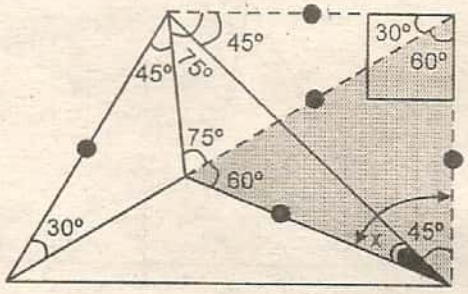
Paso Nº 1:
Observamos la siguiente figura en donde realizamos el sexto criterio de construcción.



Paso Nº 2:
Con el trazo realizado se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



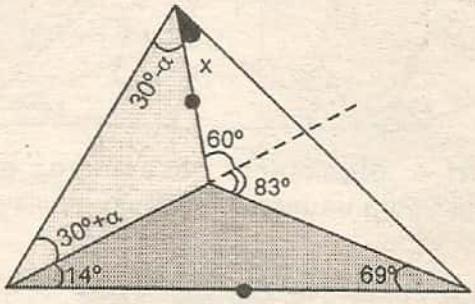
Paso Nº 3: Se observa en el triángulo equilátero donde se cumple:



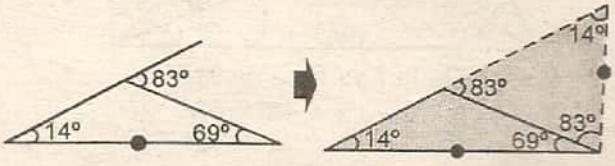
$x + 45° = 90°$
$x = 15°$

Solución Nº 73

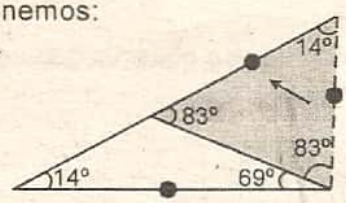
En la figura se observa:



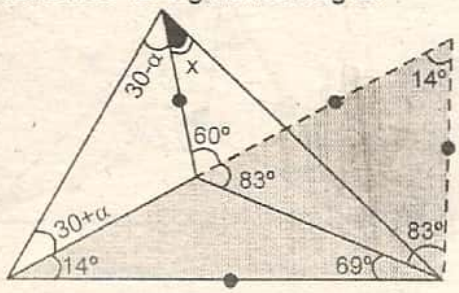
Paso Nº 1:
En la figura se realiza el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles (Sexto criterio de construcción)



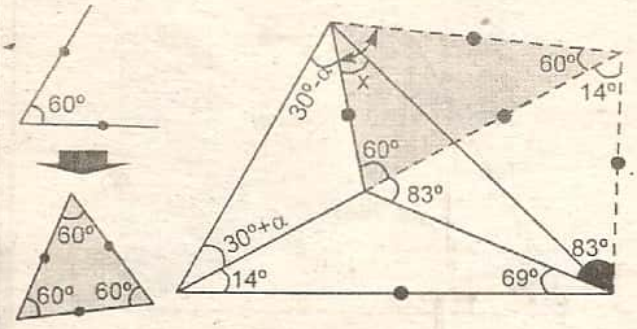
Tambien tenemos:



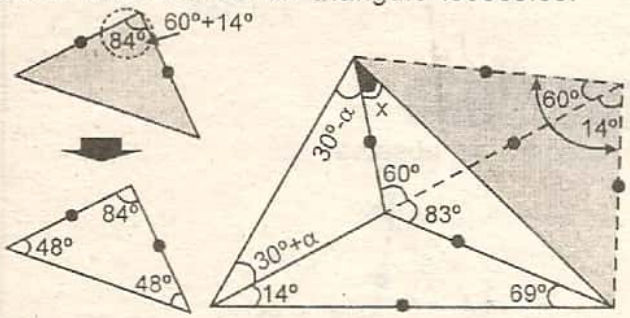
Luego tenemos la siguiente fiugra:



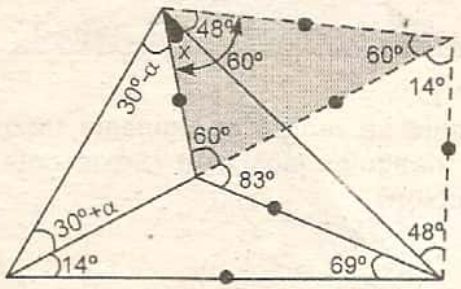
Paso Nº 2: Realizado el trazo anterior se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



Paso Nº 3:
Ahora observamos un triángulo isósceles.



Paso Nº 4: Finalmente observamos en la siguiente figura un nuevo triángulo equilátero.



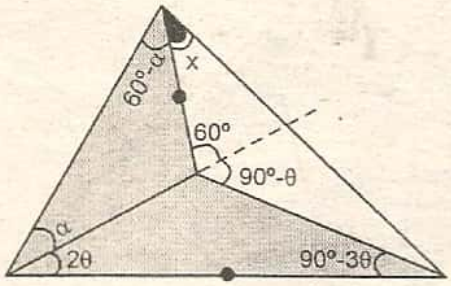
∴ De la figura se cumple:

$x + 48° = 60°$

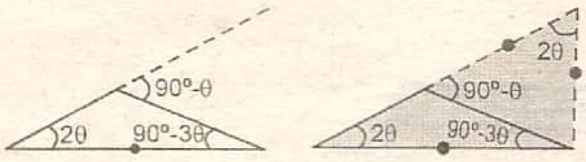
$x = 12°$

Solución Nº 74

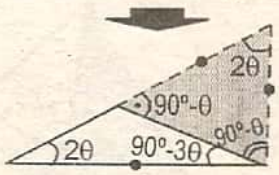
En la figura se observa:



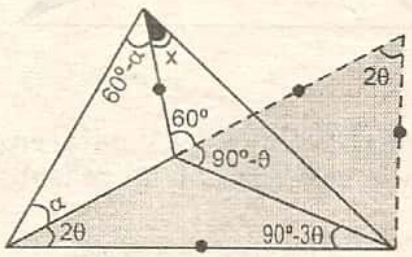
Paso Nº 1:
En la figura realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles (Sexto criterio de construcción).



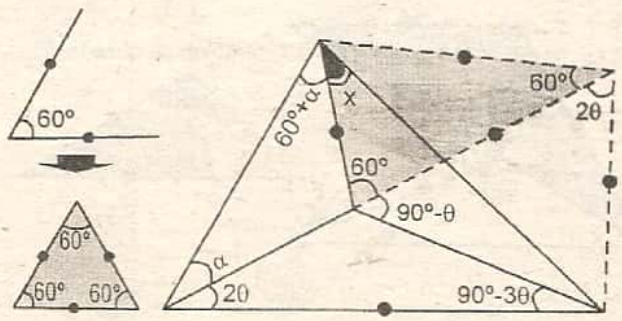
También se cumple:



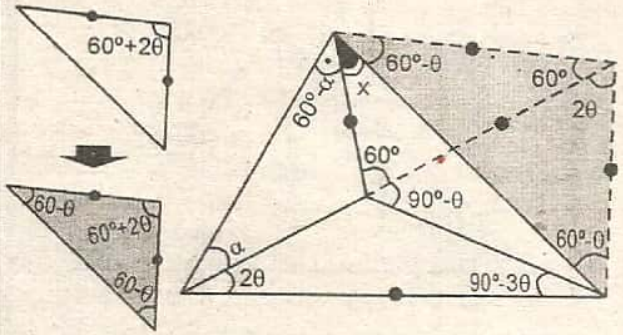
Luego tenemos en la figura:



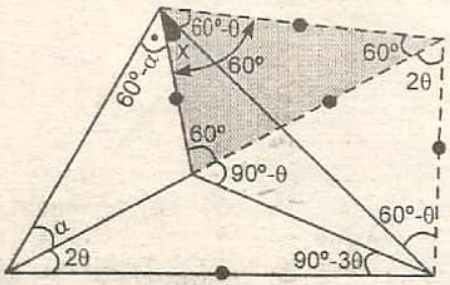
Paso Nº 2:
Realizado el trazo anterior se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



Paso Nº 3: Luego observamos un triángulo isósceles donde se cumple:



Paso Nº 4: Finalmente tenemos en la siguiente figura un nuevo triángulo equilátero.

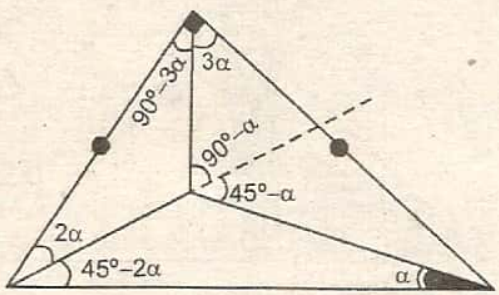


$$\therefore\ x + 60° - \theta = 60°$$

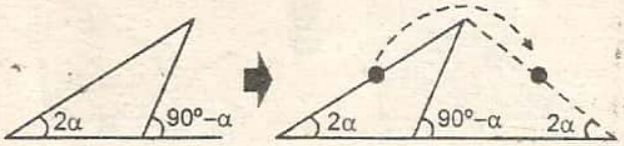
$$x = \theta°$$

Solución Nº 75

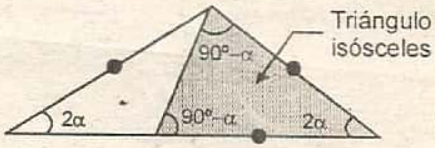
En la figura se observa:



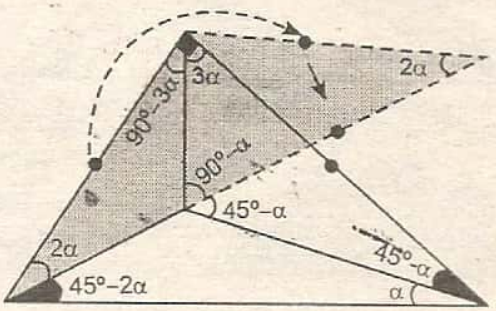
Paso Nº 1: En la siguiente figura se realiza el siguiente trazo (Sexto criterio de construcción) para obtener triángulos isósceles.



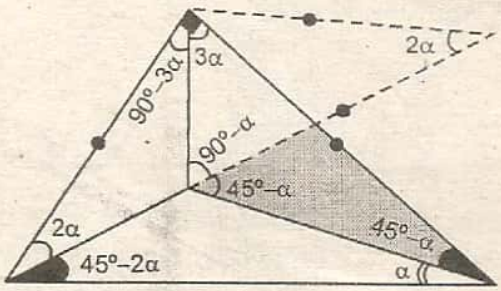
También se obtiene:



Luego obtenemos:

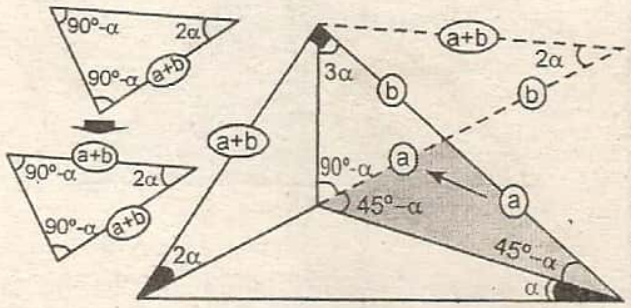


Paso Nº 2: Se observa un triángulo isósceles en la figura sombreada.

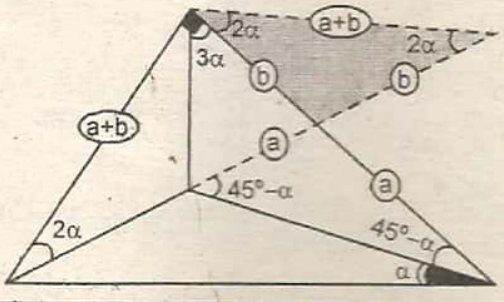


Paso Nº 3: En la figura identificamos los lados iguales de la siguiente manera:

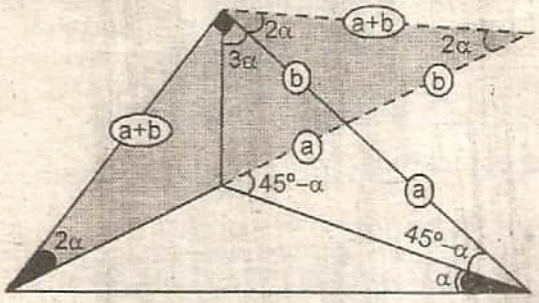
Tambien:

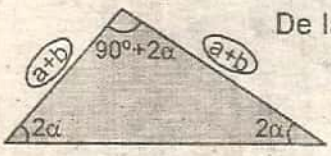


Paso Nº 4: También observamos un nuevo triángulo isósceles de la siguiente forma.



Paso Nº 5: Finalmente se observa:





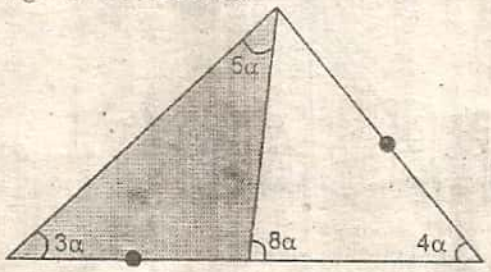
De la figura se cumple:

$$6\alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

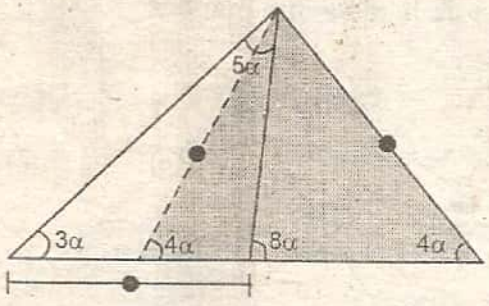
$$\alpha = 15^\circ$$

Solución Nº 76

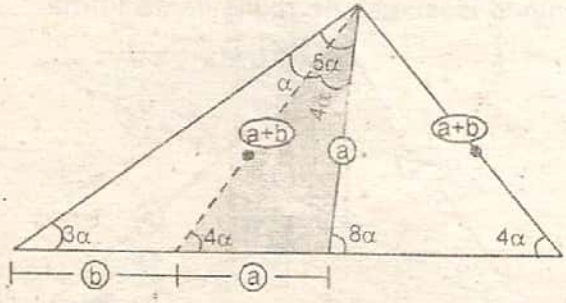
En la figura se observa:



Paso Nº 1: Trazamos una ceviana interna de tal manera que se consigue un triángulo isósceles.

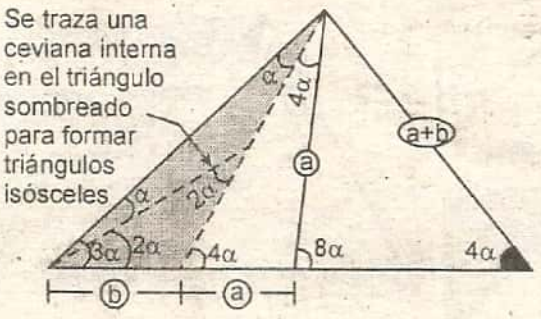


Ahora identificamos los lados iguales de la siguiente manera.

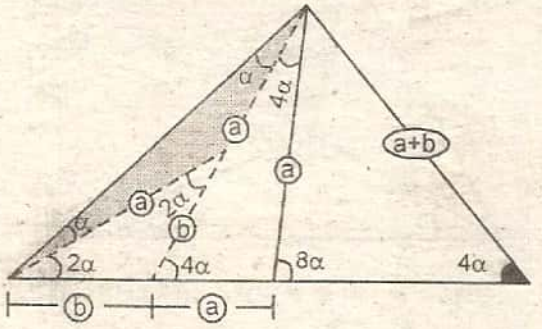


Paso Nº 3:

Ahora se realiza el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la forma siguiente:

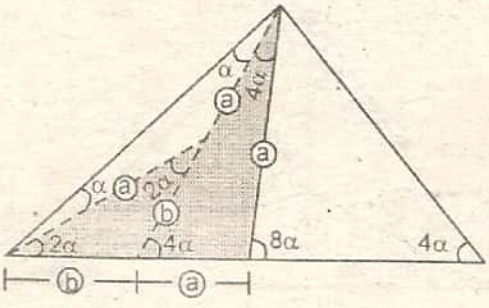


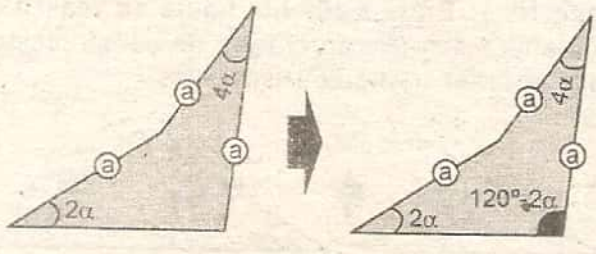
Luego se observa:



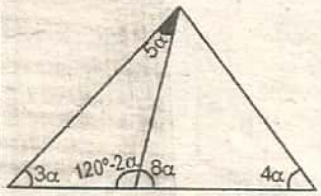
Paso Nº 4:

Ahora se tiene en la figura un cuadrilátero concavo (septimo criterio de construcción)





Paso Nº 5:
Aqui se cumple la propiedad del concavo.



Por ángulo llano:

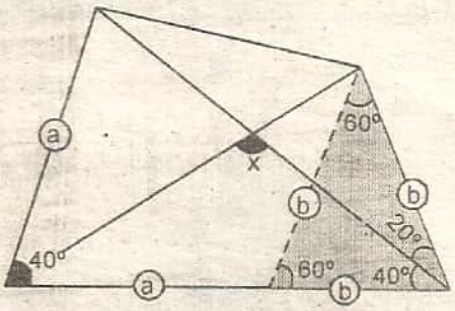
$\therefore\ 120° - 2\alpha + 8\alpha = 180°$

$6\alpha = 60°$

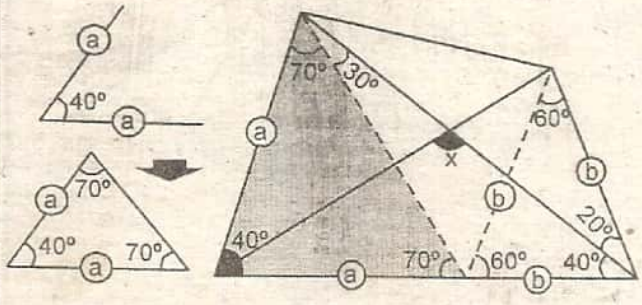
$\alpha = 10°$

Solución Nº 77

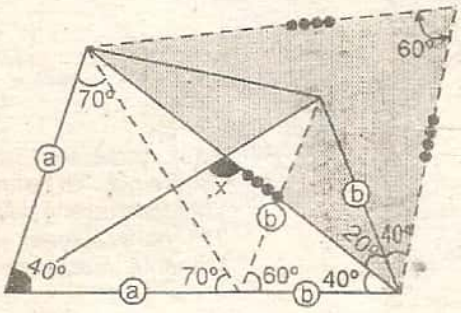
Paso Nº 1:
Realizamos el siguiente trazo para formar un triángulo equilátero.



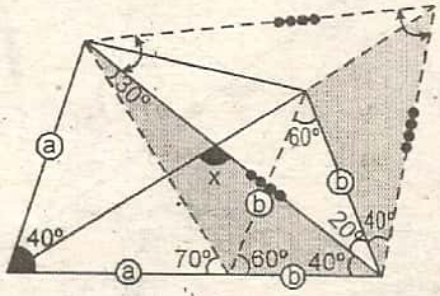
Paso Nº 2:
También se obtiene un triángulo isósceles de la siguiente forma.



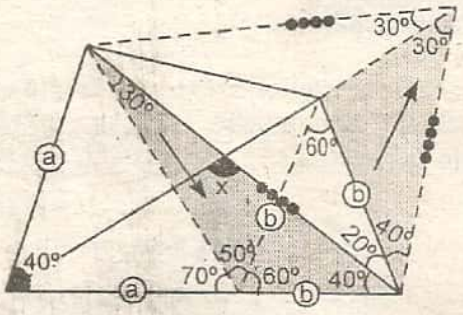
Paso Nº 3:
Ahora externamente formamos un triángulo equilátero para obtener 3 lados iguales de la siguiente manera.



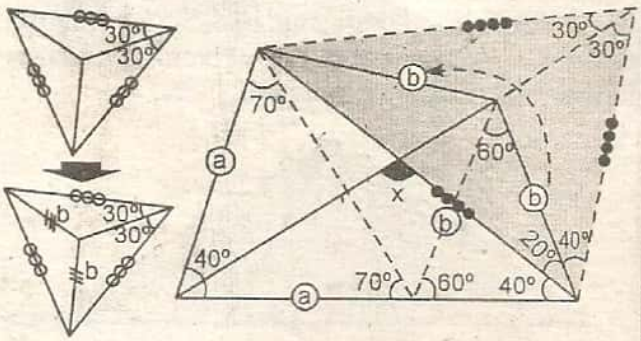
Paso Nº 4:
Luego se obtiene dos triángulos congruentes. caso (L.A.L.)



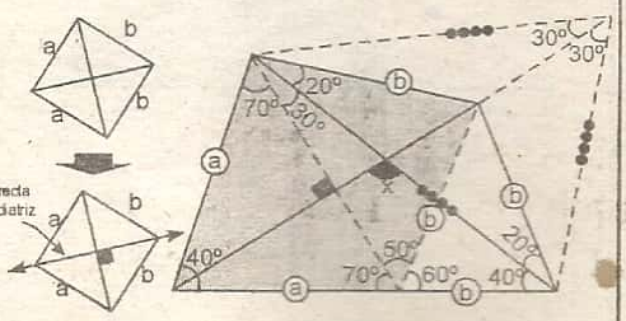
Aqui se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"



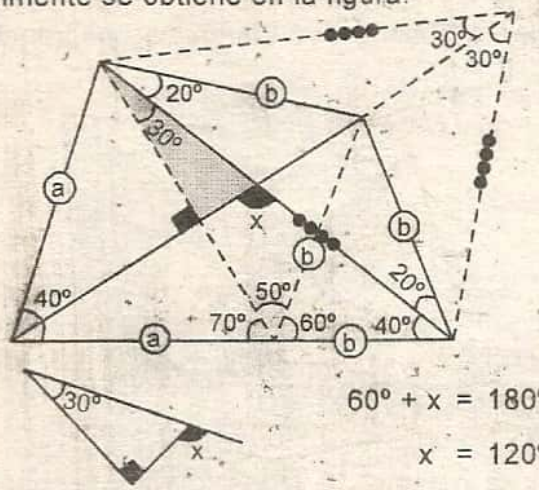
Paso Nº 5: En el triángulo equilátero trazado se cumple:



Paso Nº 6:
Ahora observamos la siguiente figura donde se cumple la propiedad de la mediatriz.



Finalmente se obtiene en la figura:

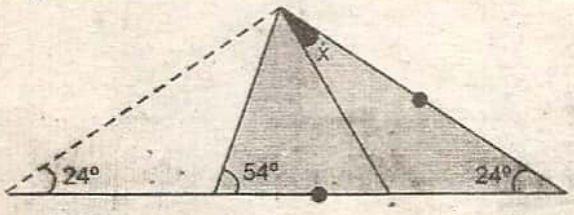


$60° + x = 180°$

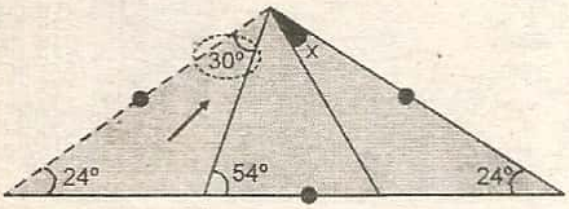
$x = 120°$

Solución Nº 78

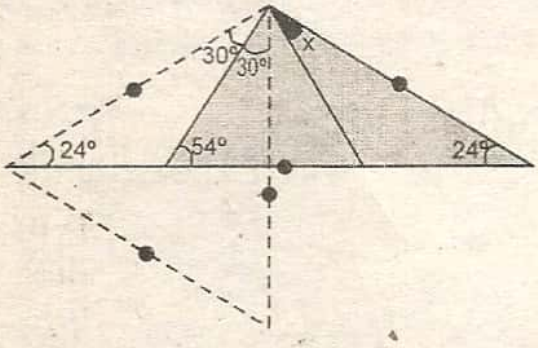
Paso Nº 1:
Trazamos una ceviana externa formando un ángulo de 24° con la base. Ello para obtener un triángulo isósceles.



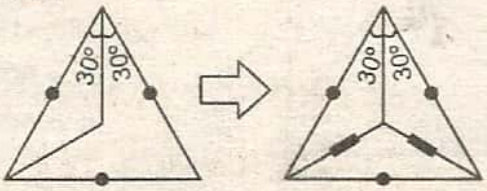
Paso Nº 2:
En la figura resultante, se observa un ángulo de 30° que es la mitad de 60° y con ello podemos formar un triángulo equilátero.

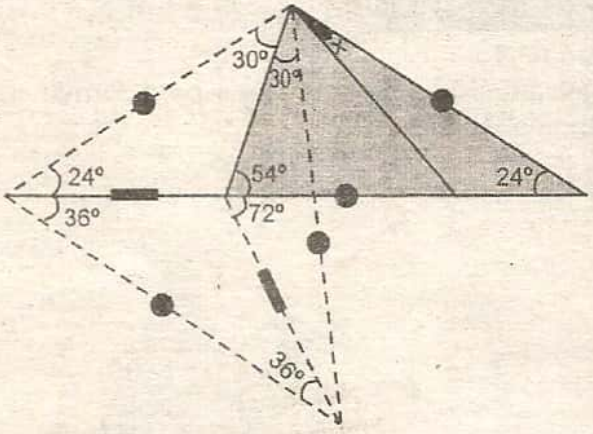


Ahora realizamos el siguiente trazo.

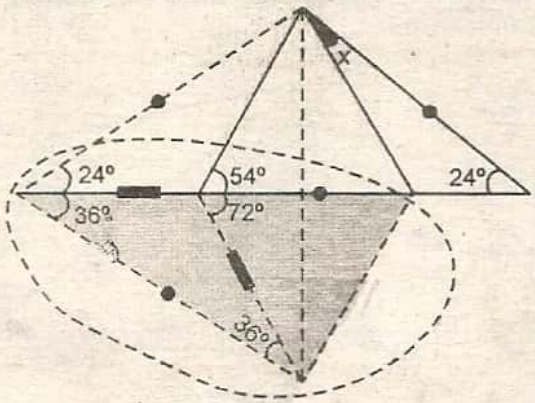


Paso Nº 3:
Completamos los ángulos internos del triángulo y se observa también se cumple la siguiente propiedad.

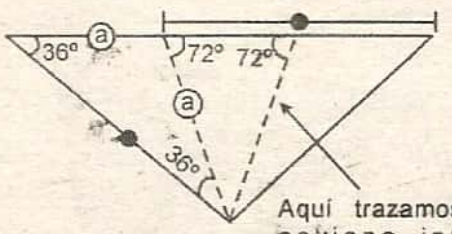




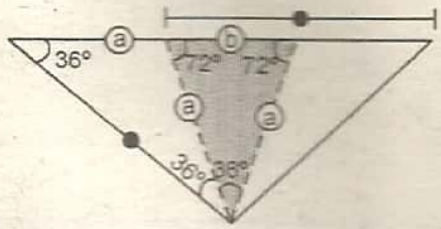
Paso Nº 4: Tomamos una porción de la figura donde se observa:



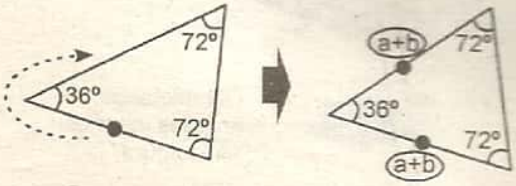
Aqui hacemos:



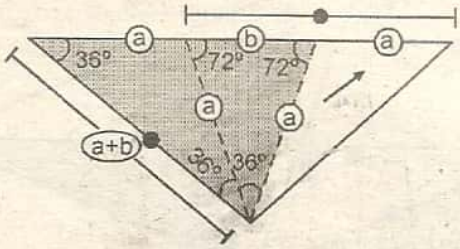
Aquí trazamos una ceviana interna formando un ángulo de 72° para obtener un triangulo isósceles



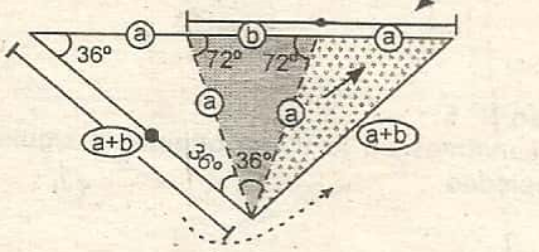
Observamos:



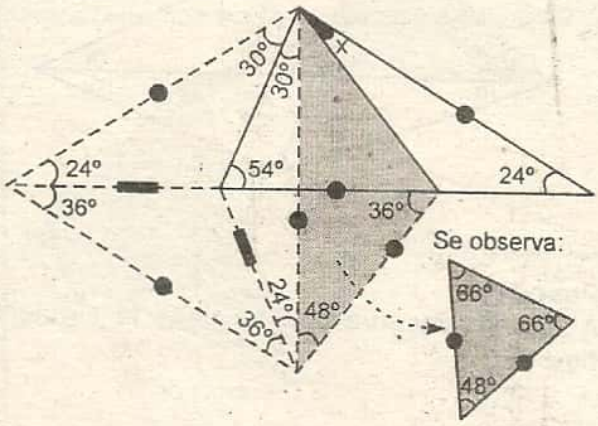
Paso Nº 5:
Aquí obtenemos:

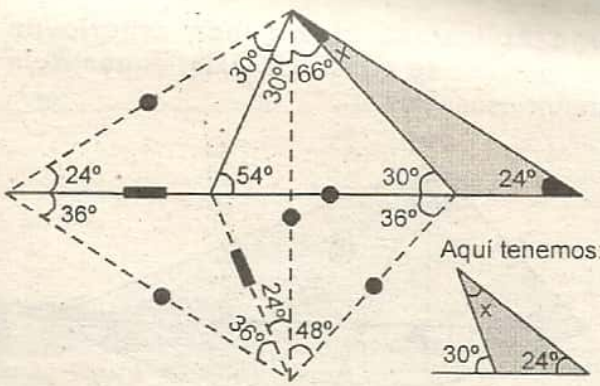


Se observa un triangulo isosceles



Paso Nº 6: Ahora observamos en el triángulo total que se cumple:



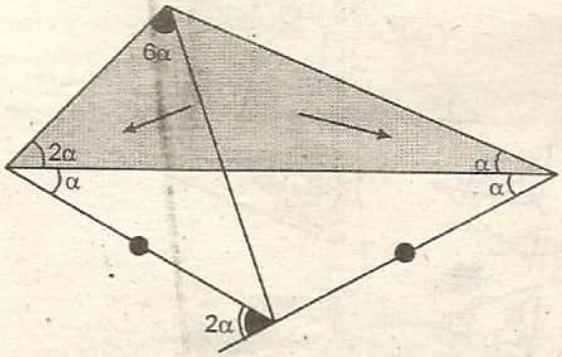


$\therefore \quad 30° = x + 24°$

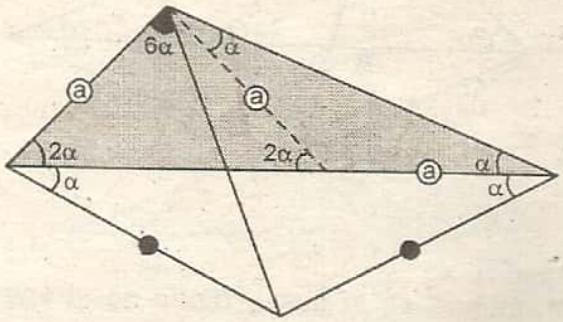
$x = 6°$

Solución Nº 79.

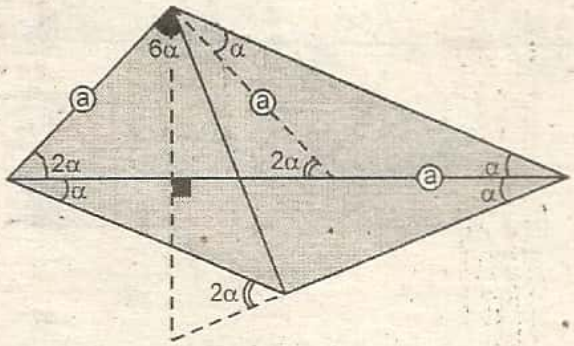
Se observa:



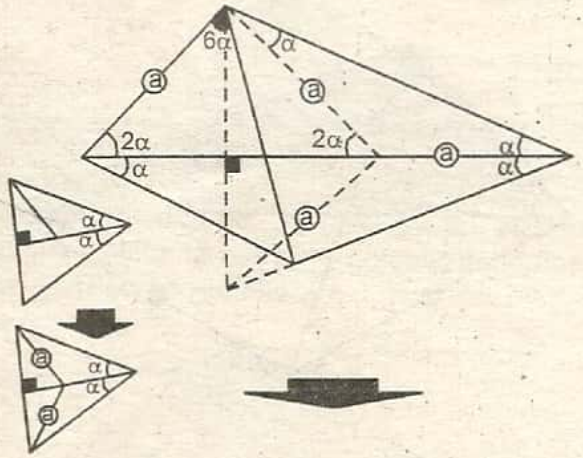
Paso Nº 1:
Aplicamos el primer criterio de construcción de la siguiente manera.

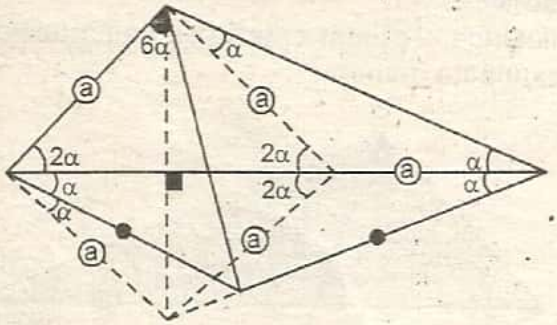


Paso Nº 2:
Luego aplicamos el segundo criterio de construcción: se construye exteriormente un triángulo isósceles.

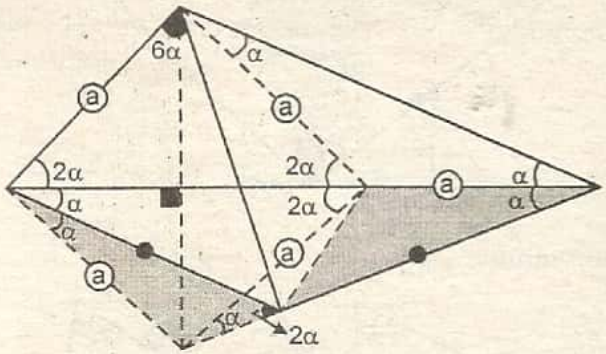


Paso Nº 3:
Se observa en el triángulo isósceles formado que se cumple la siguiente propiedad.

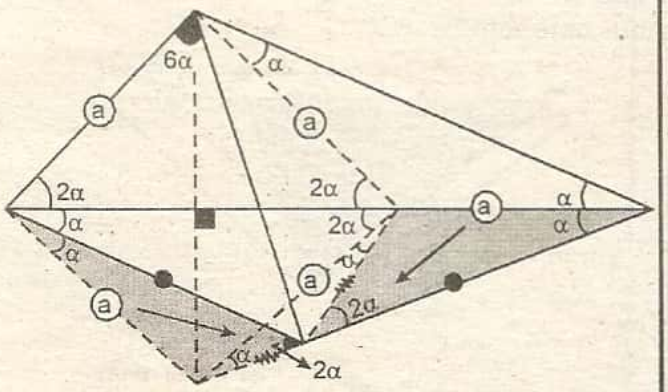




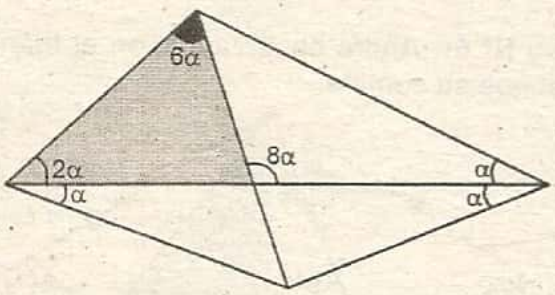
Paso Nº 4:
Si obtiene en la nueva figura dos trángulos congruentes; caso (L.A.L.)



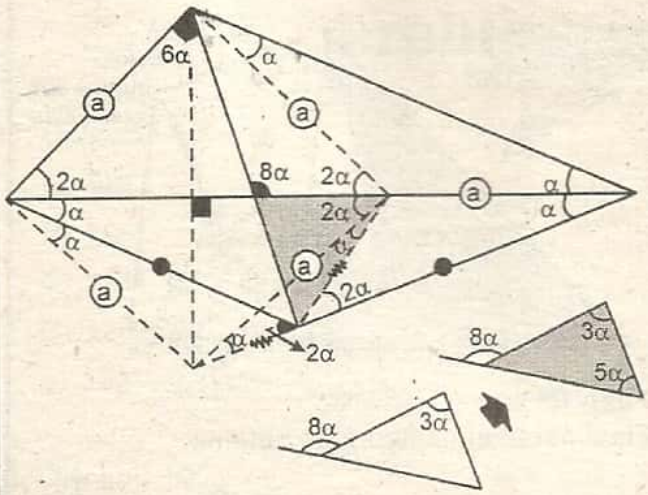
Completando ángulos internos en la figura.



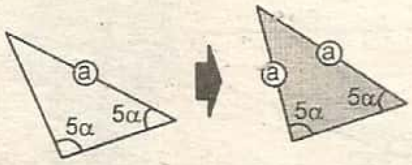
Paso Nº 5:
Observamos en la figura original la siguiente propiedad.

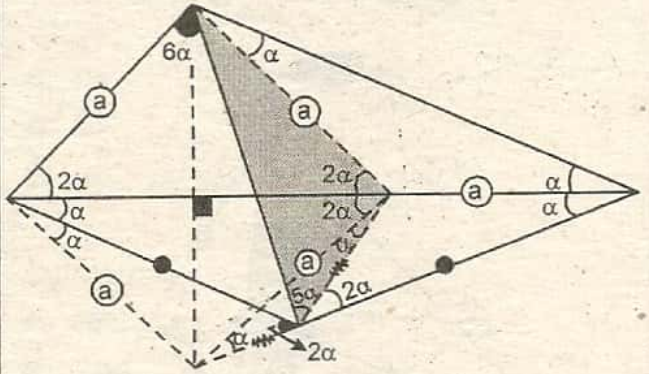


Paso Nº 6:
Ahora se observa que se tiene la siguiente figura.

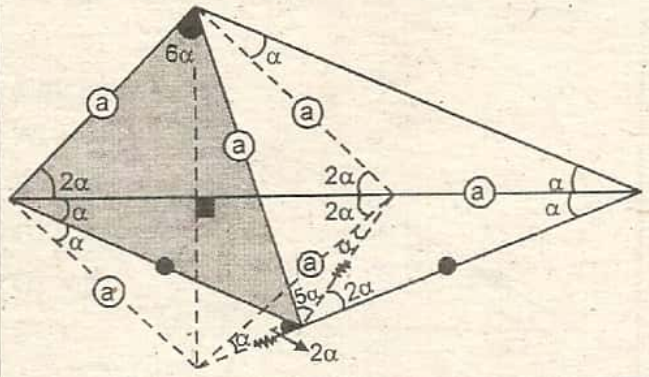


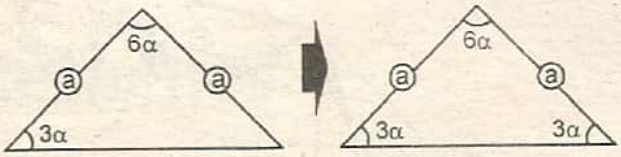
Paso Nº 7:
Ahora tenemos un nuevo triángulo isósceles de la forma siguiente:





Paso Nº 8:
Ahora tenemos en la figura que se cumple:





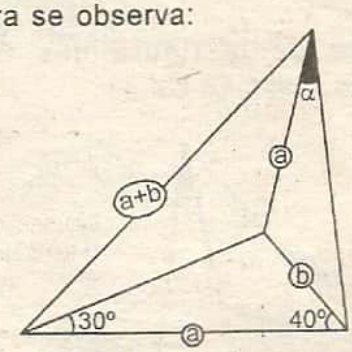
$\therefore\ 3\alpha + 6\alpha + 3\alpha = 180^\circ$

$12\alpha = 180^\circ$

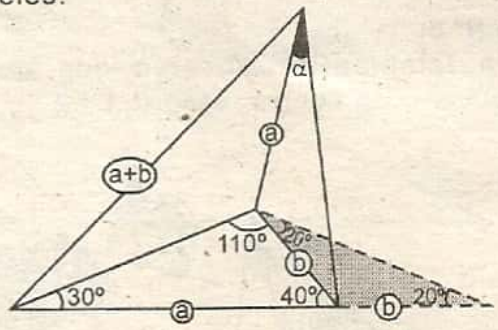
$\alpha = 15^\circ$

Solución Nº 80

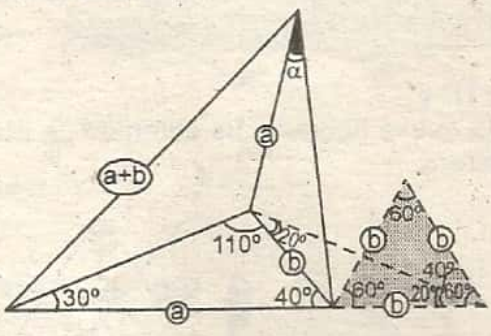
De la figura se observa:



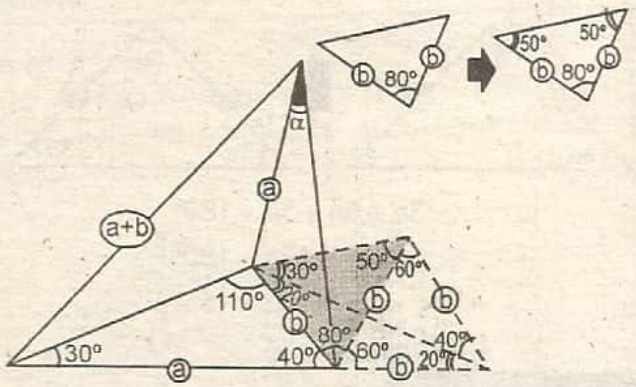
Paso Nº 1:
Realizamos el siguiente trazo para formar lados iguales con ello obtenemos un triángulo isósceles.



Paso Nº 2:
Ahora construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera.

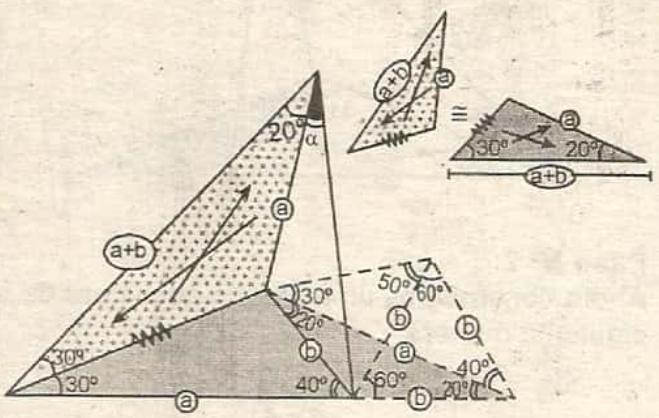


Paso Nº 3:
Se observa un nuevo tirángulo isósceles de la forma siguiente.

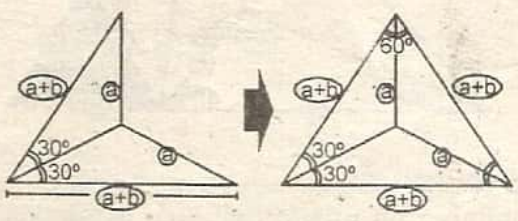


Paso Nº 4:
Se obtiene de la figura dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)

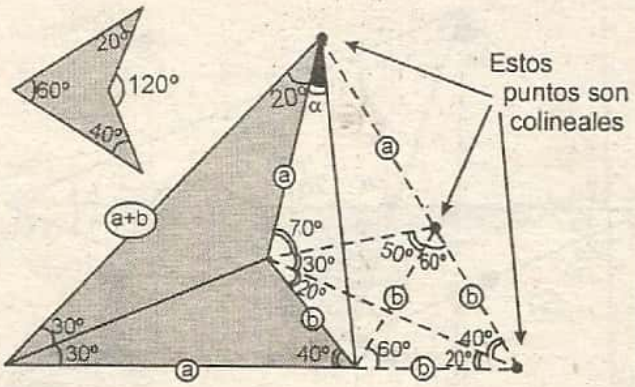
Paso Nº 5:
Ahora también se observa dos nuevos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



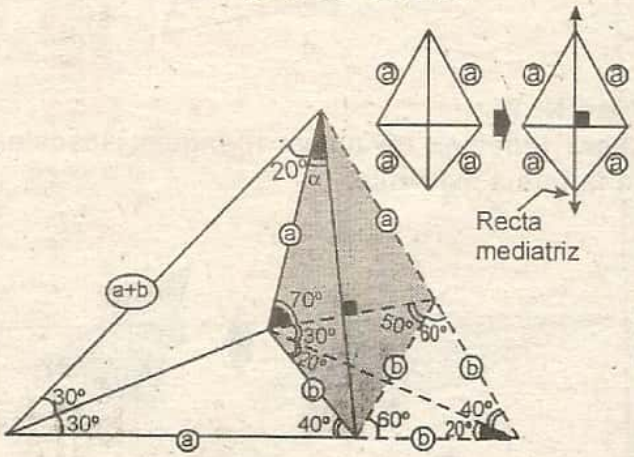
Paso Nº 6:
Son la nueva figura se ha obtenido un triángulo equilátero,

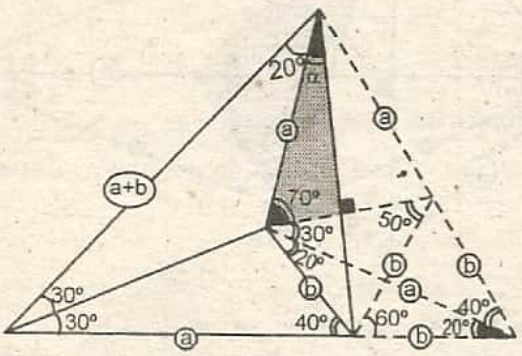


También se cumple:



Paso Nº 7:
Finalmente en la figura se obtiene:





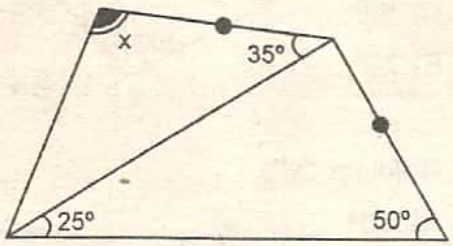
$\therefore \quad 70° + \alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 20°$

Hubo un sabio que dijo que es importante no sólo elegir compañero con acierto, sino también ser el compañero conveniente.

Problemas Resueltos

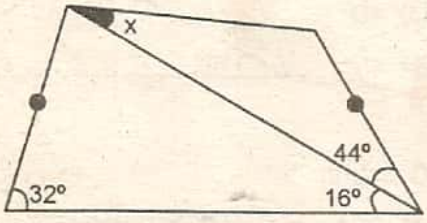
01. Calcular "x"

A) 90°
B) 105°
C) 115°
D) 120°
E) 135°



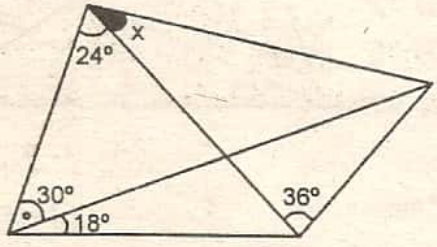
02. Calcular "x"

A) 16°
B) 24°
C) 30°
D) 32°
E) 44°



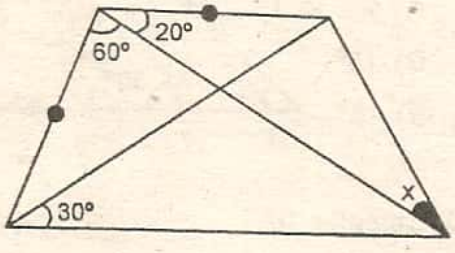
03. Calcular "x"

A) 15°
B) 24°
C) 18°
D) 30°
E) 36°



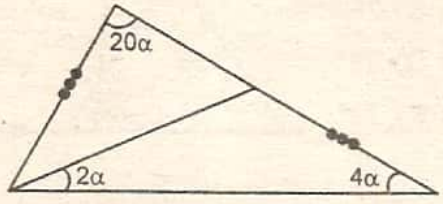
04. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 42°
E) 36°



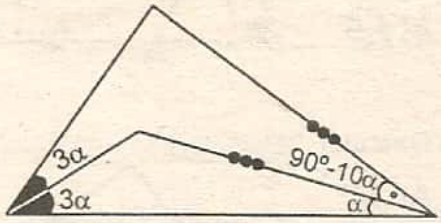
05. Calcular "α"

A) 4°
B) 5°
C) 5,5°
D) 4,5°
E) 6°



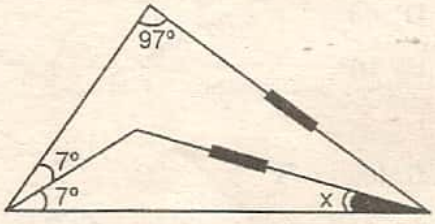
06. Calcular "α"

A) 6°
B) 7°
C) 7,5°
D) 8°
E) 9°



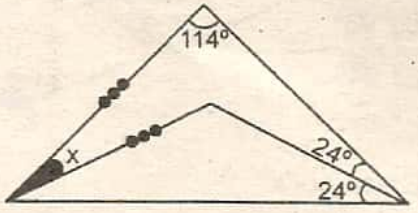
07. Calcular "x"

A) 20°
B) 21°
C) 22°
D) 23°
E) 24°



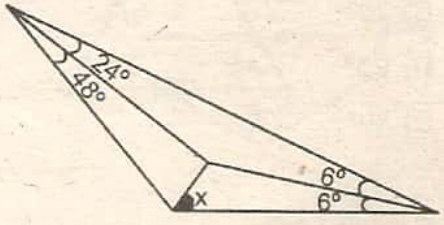
08. Calcular "x"

A) 12°
B) 16°
C) 18°
D) 20°
E) 24°



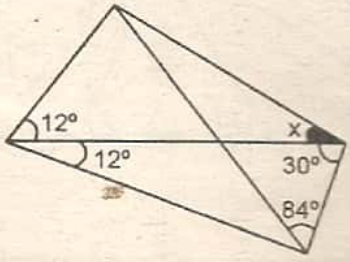
09. Calcular "x"

A) 24°
B) 30°
C) 32°
D) 36°
E) 60°



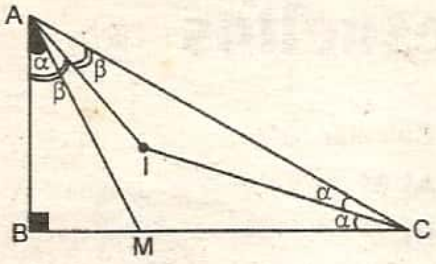
10. Calcular "x"

A) 12°
B) 16°
C) 18°
D) 20°
E) 24°



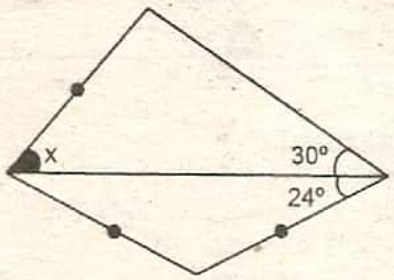
11. En la figura, AI = 4, calcular "AM"

A) $4\sqrt{3}$
B) $8\sqrt{2}$
C) $4\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{3}$



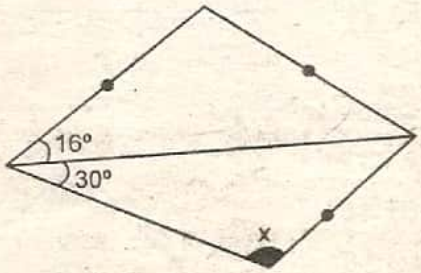
12. Calcular "x"

A) 36°
B) 30°
C) 24°
D) 48°
E) 16°



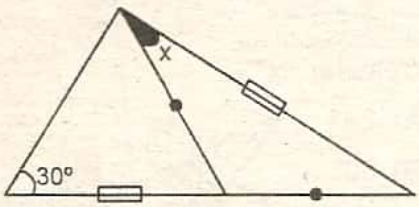
13. Calcular "x"

A) 44°
B) 24°
C) 106°
D) 95°
E) 94°



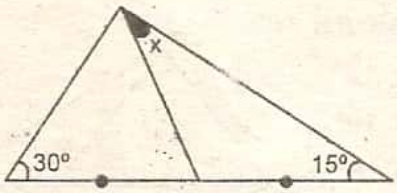
14. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



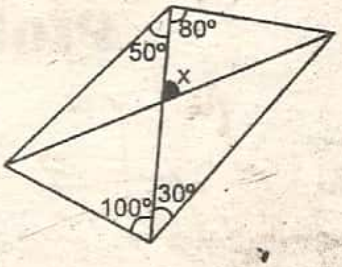
15. Calcular "x"

A) 15°
B) 20°
C) 28°
D) 30°
E) 37°



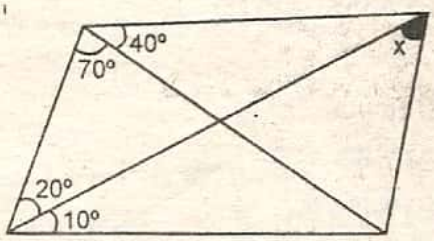
16. Calcular "x"

A) 30°
B) 45°
C) 50°
D) 60°
E) 70°



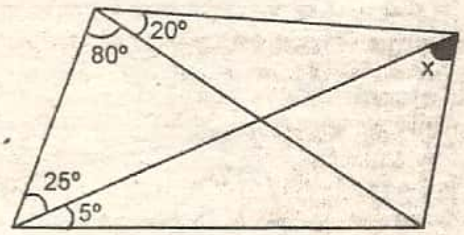
17. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 45°



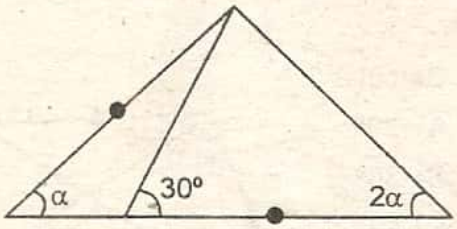
18. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 40°



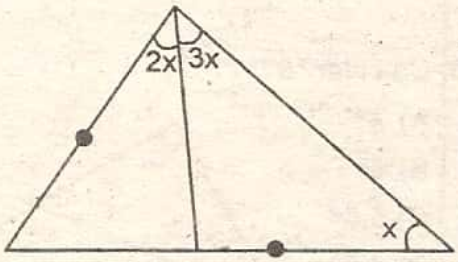
19. Calcular "α"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 15°
E) 18°



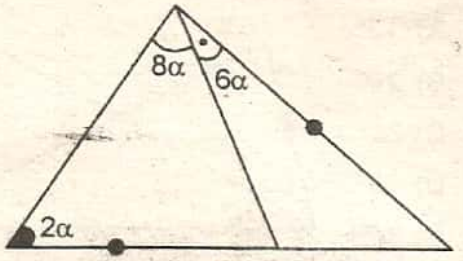
20. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 25,7°
D) 28°
E) 29°



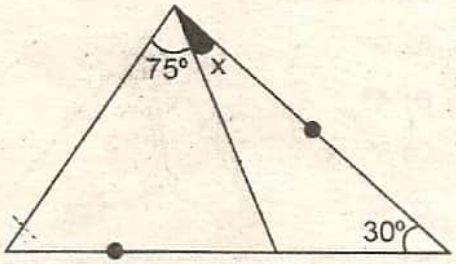
21. Calcular "α"

A) 10°
B) 12°
C) 8°
D) 9°
E) 6°



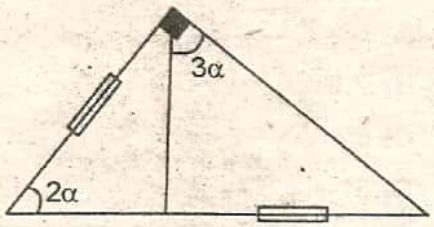
22. Calcular "x"

A) 30°
B) 35°
C) 45°
D) 50°
E) 55°



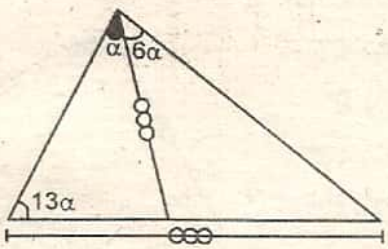
23. Calcular "α"

A) 18°
B) 20°
C) 22,5°
D) 23°
E) 24°



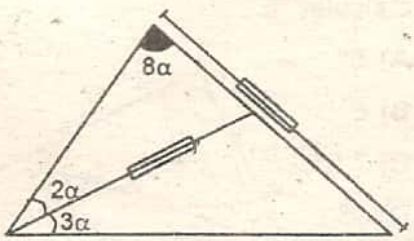
24. Calcular "α"

A) 5°
B) 5,5°
C) 6,6°
D) 6,3°
E) 6,8°



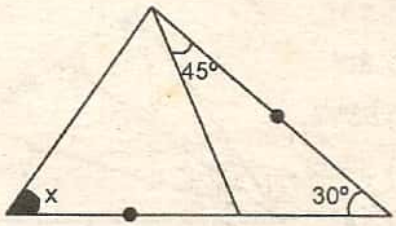
25. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



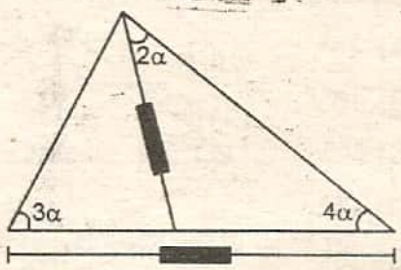
26. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 45°



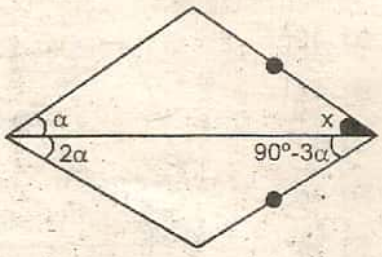
27. Calcular "α"

A) 18°
B) 20°
C) 24°
D) 15°
E) 12°



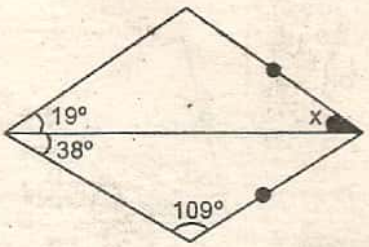
28. Calcular "x"

A) 30°
B) 15°
C) 30°−α
D) 30°+α
E) $45°-\frac{3\alpha}{2}$



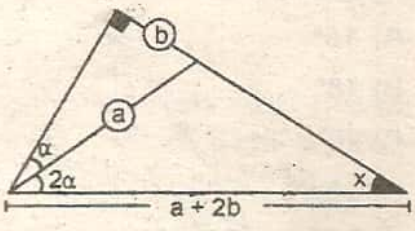
29. Calcular "x"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 19°
E) 11°



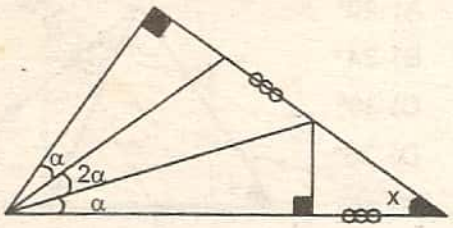
30. Calcular "x"

A) 30°
B) 18°
C) 36°
D) 24°
E) 37°



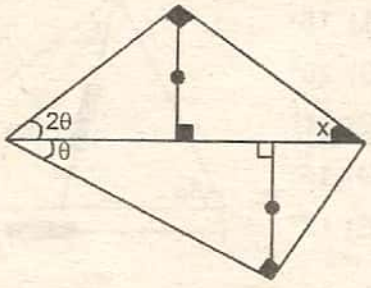
31. Calcular "x"

A) 15°
B) 30°
C) 53°/2
D) 37°/2
E) 14°



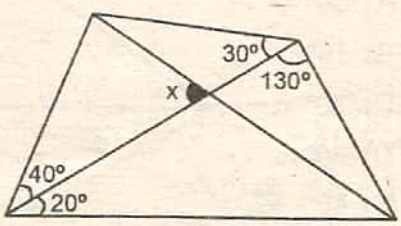
32. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 60°
D) 45°
E) 30°



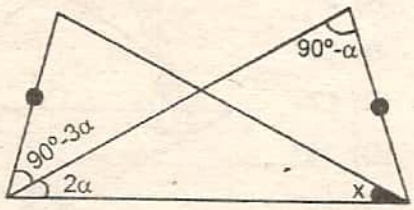
33. Calcular "x"

A) 40°
B) 42°
C) 60°
D) 45°
E) 36°



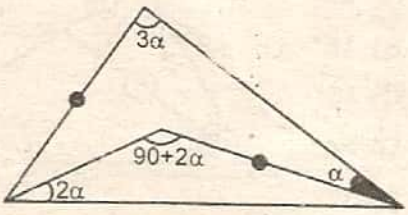
34. Calcular "x"

A) 2α
B) 90 – 3α
C) 45 – 2α
D) α
E) α/2



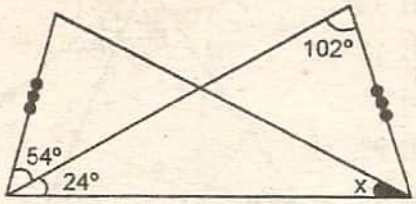
35. Calcular "α"

A) 15°
B) 18°
C) 20°
D) 22,5°
E) 24°



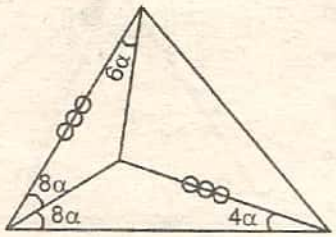
36. Calcular "x"

A) 12°
B) 24°
C) 26°
D) 30°
E) 36°



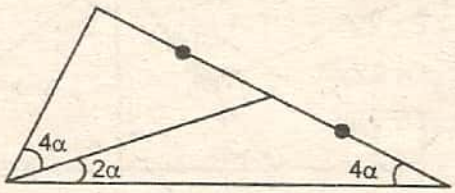
37. Calcular "α"

A) 3°
B) 4°
C) 5°
D) 6°
E) 7°



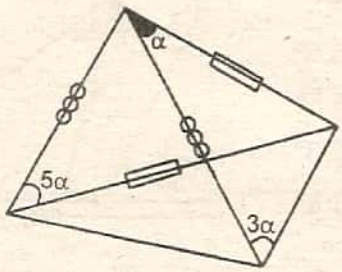
38. Calcular "α"

A) 6°
B) 7,5°
C) 8°
D) 9°
E) 10°



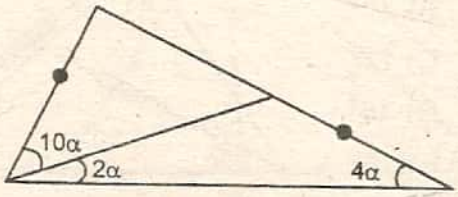
39. Calcular "α"

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



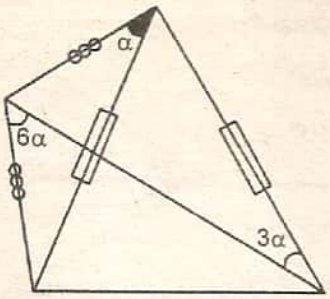
40. Calcular "α"

A) 5°
B) 6°
C) 7,5°
D) 9°
E) 10°



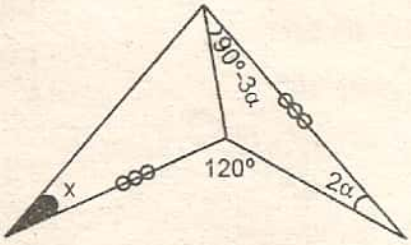
41. Calcular "α"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 32°



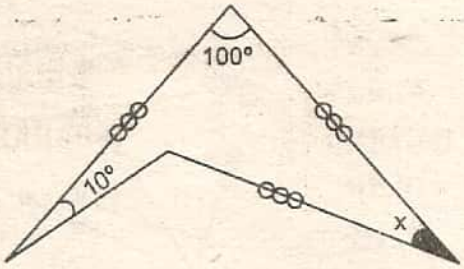
42. Calcular "x"

A) 30°–3α
B) 60°–3α
C) α
D) 2α/3
E) 90 – 4α



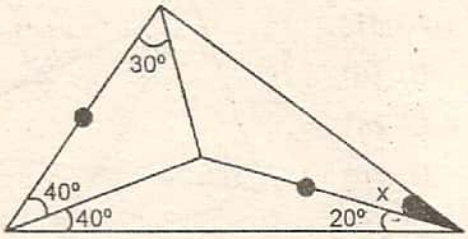
43. Calcular "x"

A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25°



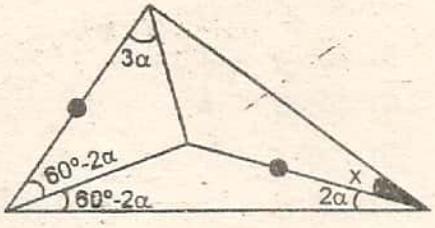
44. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



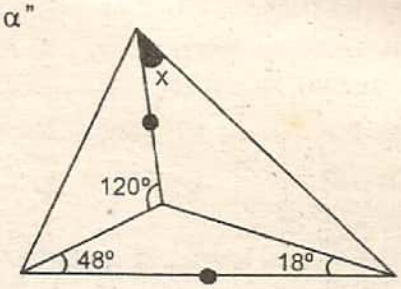
45. Calcular "α"

A) 30°
B) 30°+α
C) 30°–α
D) 60°–α
E) α



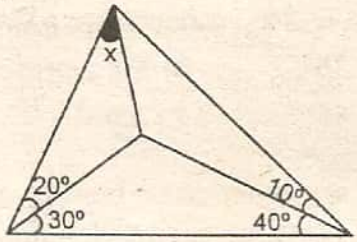
46. Calcular "α"

A) 12°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 30°



47. Calcular "x"

A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 60°



48. Exteriormente relativo al lado $\overline{AB}$ de un triángulo ABC, se ubica el punto "P", tal que PB = BC, calcular la $m\measuredangle APB$

Si: $m\measuredangle BAC = 2m\measuredangle PAB = 2\alpha$ y $m\measuredangle ACB = 90° + \alpha$

A) 100° B) 135° C) 120°
D) 150° E) 127°

49. Exteriormente y relativo al lado $\overline{AC}$ de un triángulo obtuzangulo ABC, (obtuzo en "B") se ubica el punto "D", tal que BC=CD. Calcular $m\measuredangle ABC$, si $m\measuredangle DAC = 2m\measuredangle BAC$ y $m\measuredangle ACD = 90° - 3m\measuredangle BAC$

A) 120° B) 135° C) 150°
D) 160° E) 165°

50. En un triángulo ABC acutangulo, sobre "BC" se ubica un punto exterior "D" de tal manera que AD es bisectriz del $m\measuredangle BDC$, donde además $m\measuredangle DBC = 90°+\theta$, $m\measuredangle BDA = \theta$ y $m\measuredangle ACB = 60° + 2\theta$. Hallar el máximo valor entero de $m\measuredangle BAD$. $(\theta \neq 0°)$

A) 30° B) 29° C) 28°
D) 27° E) 20°

51. En un triángulo isósceles ABC (AB=BC) donde $m\measuredangle ABC = 20°$ se traza la ceviana $\overline{CP}$ $(P \in \overline{AB})$, tal que: BC = AC + AP. Calcular $m\measuredangle APC$

A) 10° B) 60° C) 30°
D) 45° E) 37°

52. En un triángulo ABC ($m\measuredangle B = 100°$) se traza la bisectriz interior $\overline{CM}$, si AC = AM+BC. Calcular $m\measuredangle BAC$

A) 30° B) 15° C) 20°
D) 18° E) 37°

53. Se tiene el triángulo rectangulo ABC (recto en B), en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica el punto "P" tal que: AC = BP y $2m\measuredangle BAC = 3m\measuredangle CPB$. Calcular: $m\measuredangle BAC$

A) 15° B) 60° C) 37°
D) 45° E) 53°

54. En el interior de un triángulo ABC (AB=BC) se toma el punto "P" tal que PB=AC, $m\measuredangle PBA = 10°$ y $m\measuredangle PBC = 30°$. Hallar la $m\measuredangle PAB$.

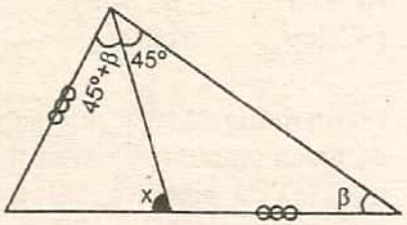
A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 25°

55. En la región interior a un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se ubica el punto "P", tal que $m\measuredangle ABP = 20°$, $m\measuredangle PBC = 80°$ y $m\measuredangle PCA = 10°$. Calcular la $m\measuredangle PAC$.

A) 10° B) 12° C) 18°
D) 20° E) 15°

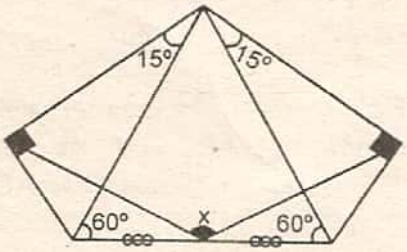
56. Calcular "x"

A) 26°30'
B) 71°30'
C) 60°
D) 75°
E) 63°30'



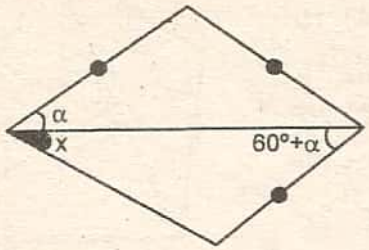
57. Calcular "x"

A) 100°
B) 120°
C) 135°
D) 150°
E) 160°



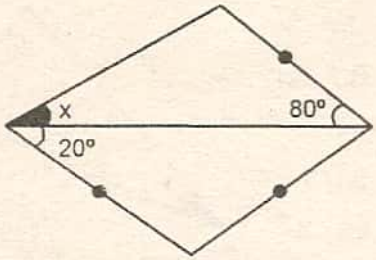
58. Calcular "α"

A) 24°
B) 30°–α
C) 60°–α
D) 30°
E) 60°



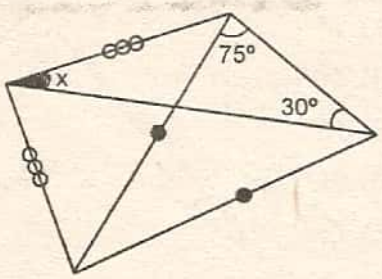
59. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 36°
D) 40°
E) 60°



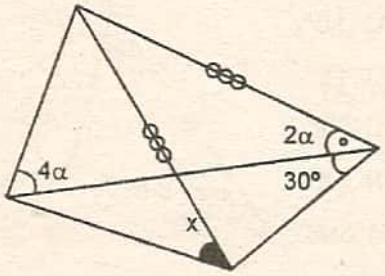
60. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



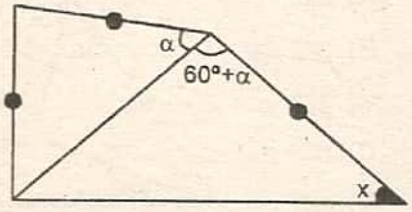
61. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



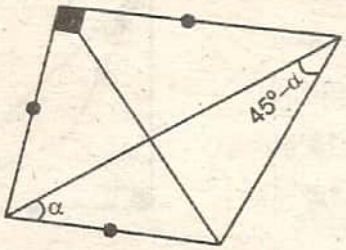
62. Calcular "x"

A) α
B) 60°–α
C) 30°–α
D) 120°–2α
E) 90°–α



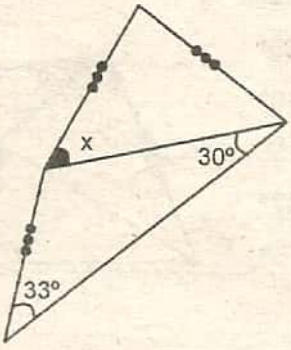
63. Calcular "α"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 30°



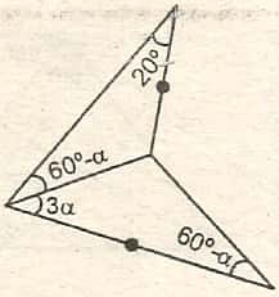
64. Calcular "α"

A) 53°
B) 57°
C) 33°
D) 43°
E) 67°



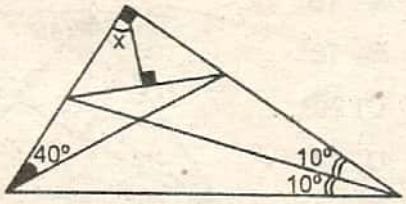
65. Calcular "α"

A) 7°30'
B) 10°
C) 15°
D) 3°
E) 30°



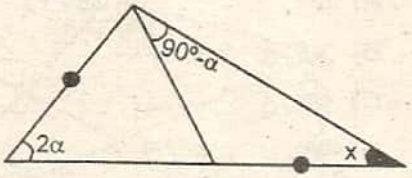
66. Calcular "x"

A) 24°
B) 18°
C) 30°
D) 60°
E) 45°



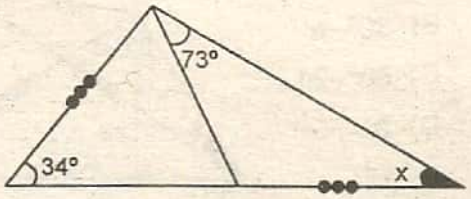
67. Calcular "x"

A) 2α
B) α
C) 90°–2α
D) 30°–α
E) 60°–α



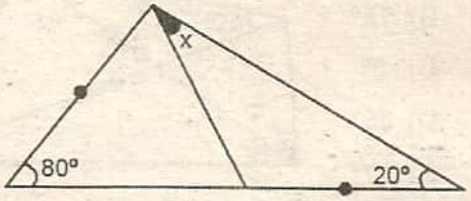
68. Calcular "x"

A) 17°
B) 34°
C) 30°
D) 33°
E) 68°



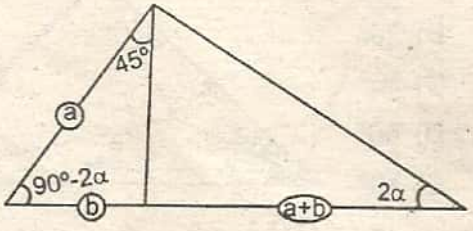
69. Calcular "x"

A) 30°
B) 25°
C) 20°
D) 15°
E) 10°



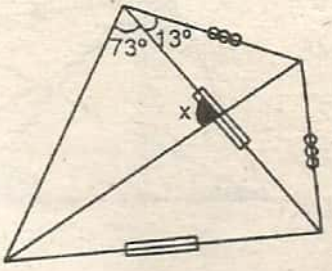
70. Calcular "α"

A) 10°
B) 12°
C) 14°
D) 15°
E) 18°



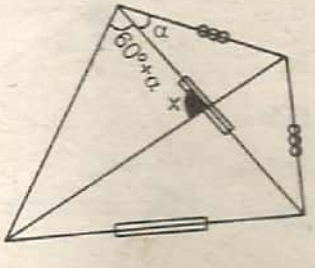
71. Calcular "x"

A) 64°
B) 60°
C) 72°
D) 84°
E) 30°



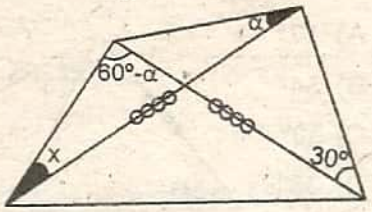
72. Calcular "x"

A) 90 – α
B) 90 – 2α
C) 30°
D) 2α
E) 45 – 2α



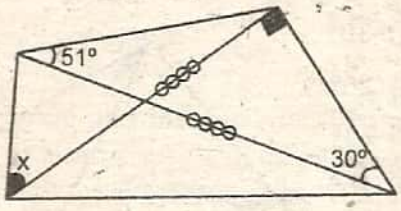
73. Calcular "x"

A) α
B) $30°-\alpha$
C) $60°-2\alpha$
D) 2α
E) 15°



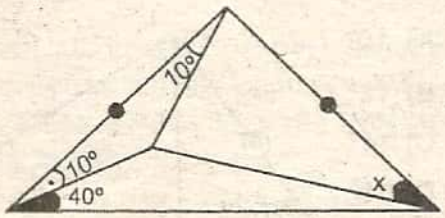
74. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 9°
D) 35°
E) 12°



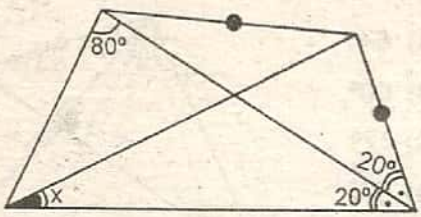
75. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 36°
D) 40°
E) 30°



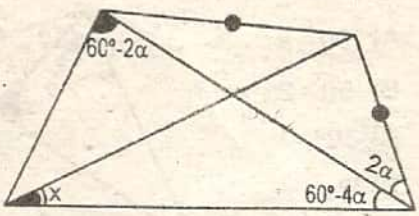
76. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 36°
D) 40°
E) 30°



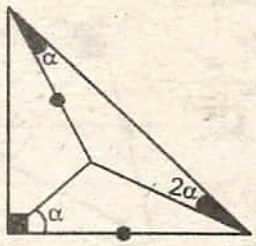
77. Calcular "x"

A) α
B) 2α
C) $60°-\alpha$
D) $30°+\alpha$
E) 30°



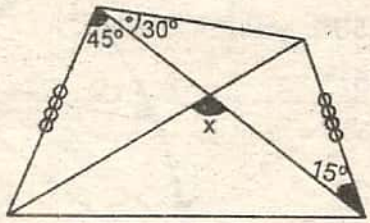
78. Calcular "α"

A) 10°
B) 15°
C) 20°30'
D) 18°30'
E) 18°



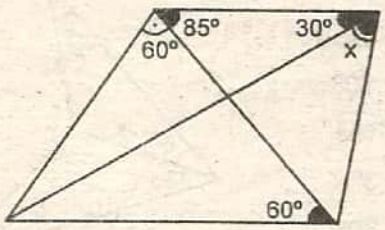
79. Calcular "x"

A) 60°
B) 90°
C) 45°
D) 37°
E) 75°



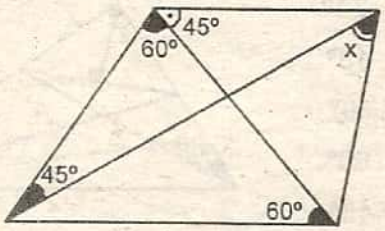
80. Calcular "x"

A) 30°
B) 55°
C) 60°
D) 65°
E) 50°



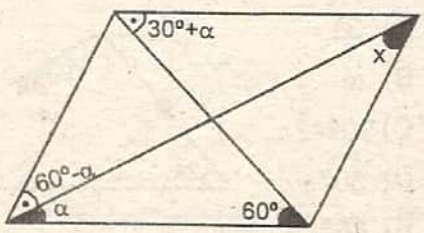
81. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 30°



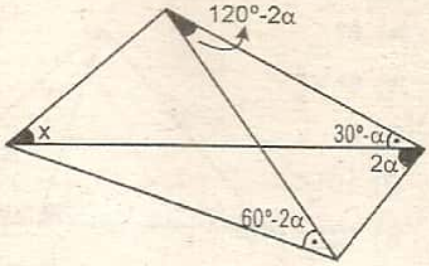
82. Calcular "x"

A) α
B) $30°-\alpha$
C) $15°+\alpha$
D) $30°+\alpha$
E) 2α



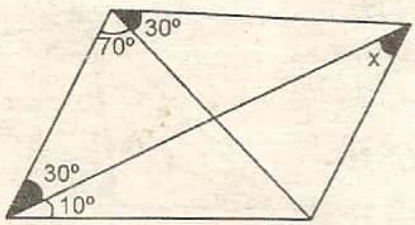
83. Calcular "x"

A) $60°-\alpha$
B) 15
C) $30°+\alpha$
D) $30°-\alpha$
E) 30



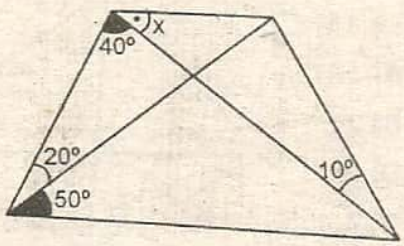
84. Calcular "x"

A) 30°
B) 20°
C) 10°
D) 18°
E) 32°



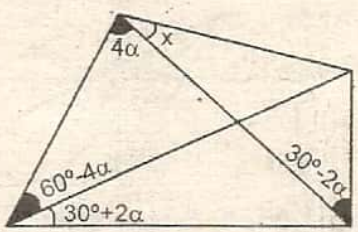
85. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 36°
D) 40°
E) 10°



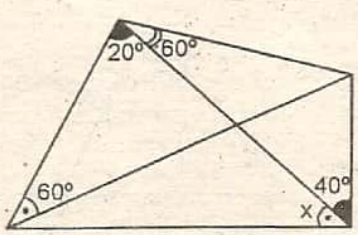
86. Calcular "x"

A) α
B) 2α
C) $30°-\alpha$
D) $60°-\alpha$
E) $30°-2\alpha$



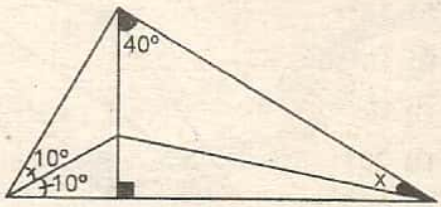
87. Calcular "x"

A) 18°
B) 20°
C) 30°
D) 35°
E) 40°



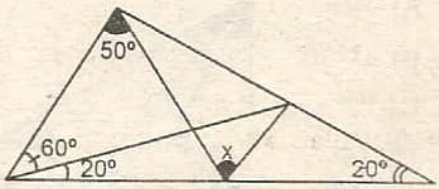
88. Calcular "x"

A) 10°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 30°



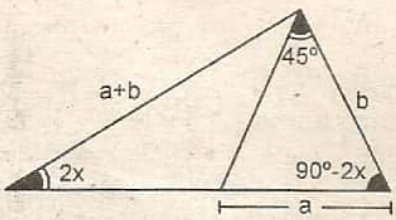
89. Calcular "x"

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



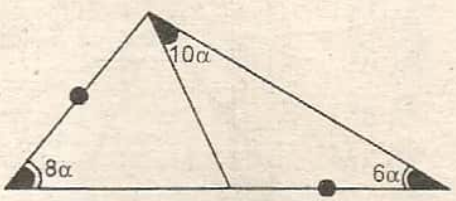
90. Calcular "x"

A) 30°
B) 18°
C) 15°
D) 18°30'
E) 22°30'



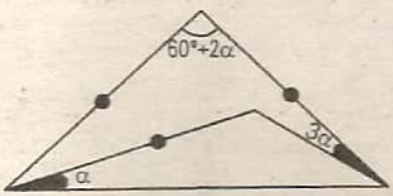
91. Calcular "α"

A) 3°
B) 4°
C) 5°
D) 6°
E) 7°



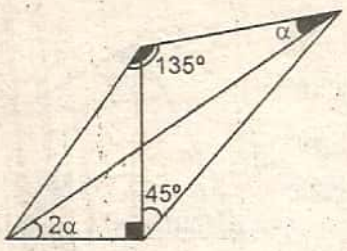
92. Calcular "α"

A) 6°
B) 6°30'
C) 7°
D) 7°30'
E) 8°



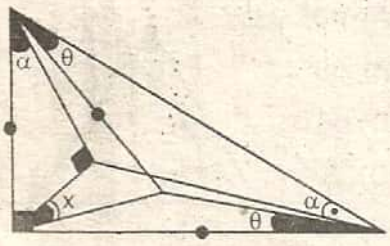
93. Calcular "α"

A) 12°
B) 18°30'
C) 15°
D) 20°
E) 22°30'



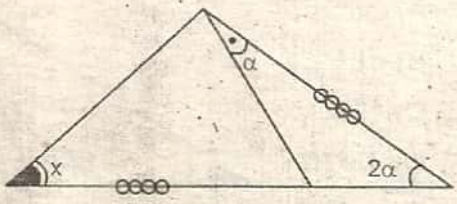
94. Calcular "x"

A) 10°
B) 11°30'
C) 12°
D) 15°
E) 23°



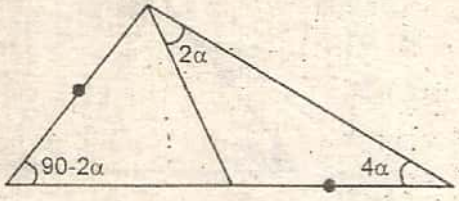
95. Calcular "x"

A) 15°
B) 30°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



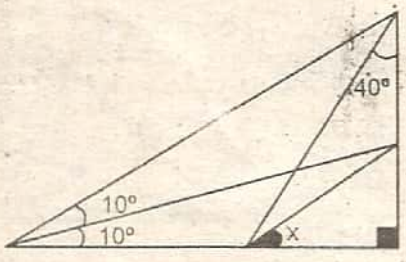
96. Calcular "α"

A) 5°
B) 6°
C) 8°
D) 10°
E) 12°



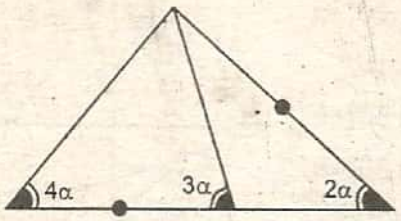
97. Calcular "x"

A) 18°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 40°



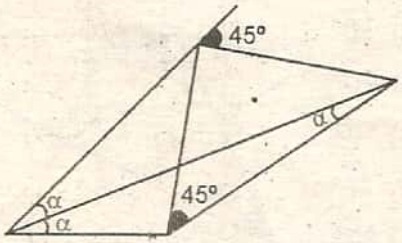
98. Calcular "α"

A) 5°
B) 8°
C) 9°
D) 10°
E) 12°



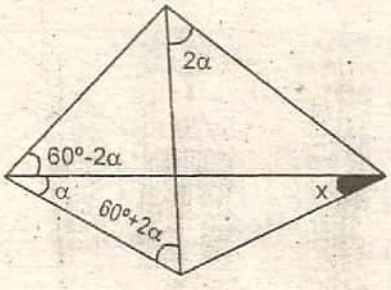
99. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



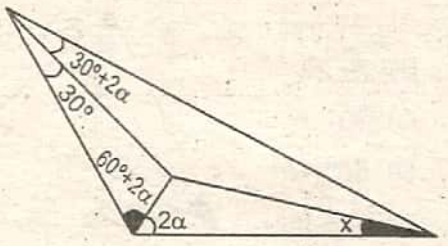
100. Calcular "α"

A) 15°
B) 18°
C) 24°
D) 30°
E) 45°



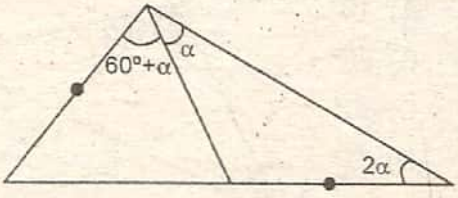
101. Calcular "α"

A) α
B) 2α
C) 30°−α
D) 60°−α
E) 10°



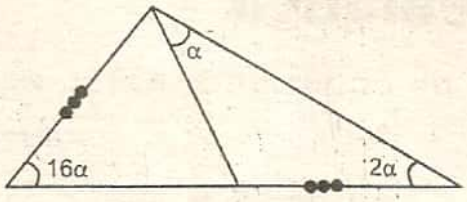
102. Calcular "α"

A) 10°
B) 8°
C) 5°
D) 15°
E) 20°



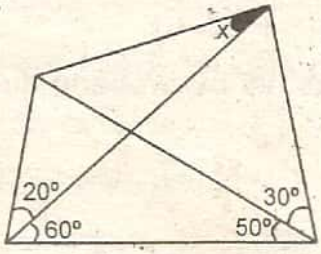
103. Calcular "α"

A) 3°
B) 4°
C) 5°
D) 6°
E) 9°



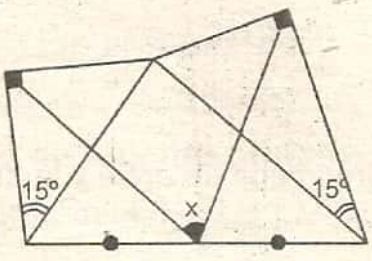
104. Calcular "x"

A) 36°
B) 30°
C) 45°
D) 24°
E) 60°



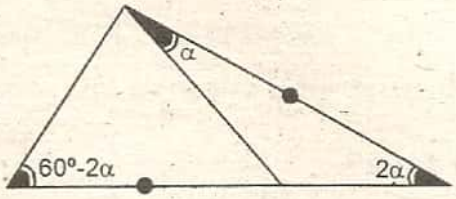
105. Calcular "x"

A) 45°
B) 60°
C) 53°
D) 36°
E) 30°



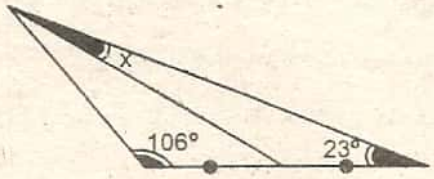
106. Calcular "α"

A) 5°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



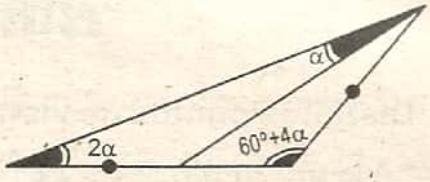
107. Calcular "x"

A) 10°
B) 14°
C) 16°
D) 20°
E) 37°



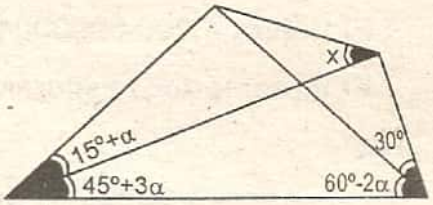
108. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 14°
E) 15°



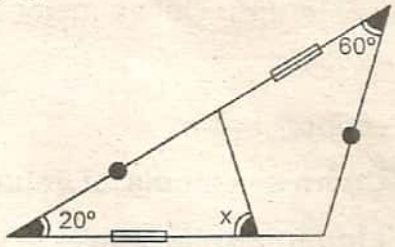
109. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 23°
D) 30°
E) 39°



110. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 40°



MUJER

Eres la razón de la hermosura
Axioma de mujer y dulzura
creada por la ley divina
la diosa que me fascina.

Eres la obra perfecta
del más sabio geómetra
quien con finos trazos
ingenió; la más bella silueta.

Eres un teorema de amor, alucinante
que lo difícil no es demostrarte,
sino conquistarte,
donde la solución requiere; belleza y arte.

Sólo un genio puede conocerte
y plasmar con su compás ardiente
en una esfera transparente
tus curvas en el futuro y en el presente.

Venero al Dios del universo
con este humilde verso
que con sus manos de aurora
moldeó a tan maravillosa criatura.
MBarcena

Humor Matemático

1. **Distintos puntos de vista :**

* A la pregunta: ¿2 + 2 = ...?

entonces responden:

El ingeniero : 3,9968743

El físico: 4,000,0000004 ± 0,000 000 000 6

El matemático: esperen, sólo unos minutos más, ya he probado que la solución existe

y es única, ahora la estoy acotando...

El filósofo: ¿qué quiere decir 2+2?

El lógicó: Defina mejor 2+2 y le responderé.

* A la pregunta:

2. **¿Cómo se calcula el volumen de una vaca?**

El Ingeniero: Metemos la vaca dentro de una gran cuba de agua y la diferencia de volumen es la de la vaca.

El matemático: Parametrizamos, la superficie de la vaca y se calcula el volumen mediante una integral triple.

El físico: Supongamos que la vaca es esférica .....

3. **Para los que saben química:**

¿Por qué los osos blancos se disuelven en agua?

- porque son polares

¿Qué hace un electrón cuando cae al suelo?

- Plank

Chistes Matemáticos

1. **Estaba Jesús predicando en el monte Sinaí, cuando comento a sus discípulos:**

   $$y = ax^2 + bx + c$$

   ¿y eso es? Dijo uno de los discípulos.

   A lo que Jesús respondió : ¡una parábola!

2. **¿Qué es un niño complejo?**

   Un niño con la madre real y el padre imaginario

3. **¿Qué es un oso polar?**

   Un oso rectangular, después de un cambio de coordenadas.

4. **¿Qué le dice la curva a la tangente?**

   ¡No me toques!

5. **¿Te gusta los polinomios?**

   Pero, sólo hasta cierto grado

6. **¿Por qué se suicidó el libro de matemática?**

   Porque tenia demasiados problemas.

7. **Un estadístico** podría meter su cabeza en un horno y sus pies en hielo, y decir que en promedio se encuentra bien.

8. **Va e^x por la calle y se le cruza un integrador**, el cual, todo prepotente, le dice: "¡a que te integro!" y e^x le contesta: "Y a mí que".

9. **Un médico, un abogado y un matemático** están hablando de si tener una esposa o novia.

   Empieza el abogado : "obviamente, lo mejor es tener una novia; porque divorciarte de tu mujer puede ser muy difícil, en cambio, en cambio cortar con una novia es fácil". El doctor dice:¡No estoy de acuerdo, esta claro que el tener una mujer te evita el estrés y mejora tu salud". A lo que el matemático señala: "lo mejor es tener a los dos; así consigues que la esposa crea que estas con la otra, la otra crea que estas con la esposa, y mientras tanto tu puedes trabajar tranquilo en la matemática.

CLAVES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

N°		N°		N°		N°		N°	
1	C	23	C	45	B	67	A	89	E
2	C	24	D	46	D	68	B	90	C
3	D	25	B	47	A	69	E	91	C
4	B	26	C	48	D	70	D	92	D
5	B	27	A	49	C	71	A	93	B
6	C	28	C	50	B	72	B	94	B
7	D	29	E	51	C	73	A	95	C
8	A	30	C	52	C	74	C	96	A
9	B	31	C	53	D	75	C	97	C
10	C	32	E	54	B	76	E	98	D
11	C	33	A	55	D	77	E	99	D
12	A	34	A	56	B	78	C	100	D
13	C	35	D	57	D	79	E	101	B
14	C	36	B	58	B	80	B	102	A
15	D	37	C	59	B	81	A	103	C
16	D	38	B	60	C	82	A	104	B
17	C	39	C	61	D	83	E	105	E
18	C	40	A	62	E	84	A	106	C
19	B	41	A	63	C	85	A	107	B
20	C	42	C	64	B	86	B	108	B
21	A	43	D	65	C	87	C	109	D
22	C	44	C	66	C	88	C	110	A

Reflexión

Toda está en el estado mental;
Porque muchas carreras se han perdido
Antes de haberse corrido;
Y muchos cobardes han fracasado;
Antes de haber su trabajo empezado.
Piensa en grande y tus hechos crecerán.
Piensa en pequeño, y quedarás atrás;
Piensa que puedes y podrás:
Todo está en el estado mental.

IMPECUS

Una nueva generación de Libros didácticos